Spectral and Evolution Problems
Vol. 16

Спектральные и эволюционные задачи
Том. 16

Editors:
N. D. Kopachevsky, I. V. Orlov

Taurida National V.Vernadsky University
Simferopol, Ukraine

Simferopol, Ukraine

Taurida National V.Vernadsky University
Black Sea Branch of Moscow State University
Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimean Academy of Sciences
Crimean Mathematical Foundation

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn
Mathematical School-Symposium
(KROMSH-2005)

September 18 – 29, 2005, Sevastopol, Laspi

Volume 16

Simferopol, 2006

UDC 517.432+517.515+515.958

Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 16. /Group of authors. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, Black Sea Branch of Moscow State University, Crimean Scientific Center of Ukrainian NAS, Crimean Academy of Sciences, Crimean Mathematical Foundation, 2006. — 210 pp. — in Ukrainian, Russian and English.

This collection contains accounts of lectures and papers of the participants of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium, which was held by the Crimean Mathematical Foundation. The materials of the Symposium are devoted to the actual mathematical investigations in the field of spectral and evolutionary problems, and to the close questions.

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of mathematical and physical specialities.

Предисловие

Шестнадцатая Крымская Осенняя Математическая школа-Симпозиум КРОМШ-2005 проходила с 18 по 29 сентября 2005 г. в поселке Ласпи, в одном из лучших мест Южного Берега Крыма – заливе Батилиман, на территории базы отдыха "Чайка".

Как и в предыдущие годы, Оргкомитет КРОМШ возглавлял заведующий кафедрой математического анализа Таврического Национального Университета им. В.И.Вернадского, профессор Н.Д.Копачевский. Организовали и провели Школу члены Оргкомитета Б.Д.Марянин, М.А.Муратов, И.В.Орлов, Ю.С.Пашкова, С.И.Смирнова, П.А.Старков.

Крымские Осенние Математические Школы (КРОМШ) проходят в Крыму, в Ласпи-Батилимане, ежегодно, начиная с 1990 г., в течение двенадцати дней во второй половине сентября. Принцип школ — сочетание активного научного общения в высококвалифицированной и представительной научной среде с прекрасным отдыхом в уникальном заповедном месте Южного берега Крыма.

Каждая из составляющих этого "высшего принципа"достигла, возможно, своего пика на нынешней Школе. В работе симпозиума приняли участие около 250 математиков из Украины, России, Белоруссии, Армении, Узбекистана, Польши, Германии, Франции, Израиля, Турции и США. В рамках Школы проходила также конференция Института математики НАН Украины "Methods of Functional Analysis in Mathematical Physics"(MFAMP), посвященная 80-летнему юбилею акад. Ю.М.Березанского и 70-летнему юбилею проф. Л.П.Нижника. Среди участников Школы — около 90 докторов наук, 9 членов и членов-корреспондентов Национальных академий наук, заметно были представлены и молодые ученые. График научной работы симпозиума был чрезвычайно напряженным, но теплое море ($+23^\circ$ круглосуточно все 12 дней — еще один рекорд Школы) и прекрасная погода позволяли снять напряжение.

Оргкомитет Школы традиционно возглавляет Заслуженный деятель науки и техники Украины, заведующий кафедрой математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, профессор Н. Д. Копачевский. В состав Программного Комитета КРОМШ-2005 вошли: Агранович М.С. (Москва), Антоневич А.Б. (Минск), Березанский ЮМ. (Киев), Власов В.В. (Москва), Волевич Л.Р. (Москва), Горбачук М.Л. (Киев), Каметака Йошинори (Осака), Копачевский Н.Д. (председатель, Симферополь), Маламуд М.М. (Донецк), Мельник В.С. (Киев), Нижник Л.П. (Киев), Овчинников В.И. (Воронеж), Орлов И.В. (ученый секретарь, Симферополь), Самборский С.Н. (Кан), Самойленко А.М. (Киев), Самойленко Ю.С. (Киев), Скубачевский А.Л. (Москва), Чернышов К.И. (Воронеж).

В состав Программного Комитета конференции MFAMP вошли: Самойленко А.М. (Председатель), Горбачук М.Л., Горбачук В.И., Калюжный А.А., Кочубей А.Н., Кондратьев Ю.Г., Кошманенко В.Д., Михайлец В.А., Островский В.Л., Працьовитый М.В., Самойленко Ю.С.

На Школе работали следующие секции:

Секция 1. Общая теория операторов.

Руководители: Антоневич А.Б. (Минск), Горбачук М.Л. (Киев), Овчинников В.И. (Воронеж), Самойленко Ю.С. (Киев), Кондратьев Ю.Г. (Бонн).

Секция 2. Спектральная теория операторов.

Руководители: Агранович М.С. (Москва), Баскаков А.Г. (Воронеж), Власов В.В. (Москва), Хромов А.П. (Саратов).

Секция 3. Дифференциально-операторные уравнения.

Руководители: Волевич Л.Р. (Москва), Левенштам В.Б. (Ростов-на-Дону), Мельникова И.В. (Екатеринбург), Прилепко А.И. (Москва).

Секция 4. Краевые задачи.

Руководители: Пташник Б.И. (Львов), Скубачевский А.Л. (Москва).

Секция 5. Нелинейный анализ.

Руководители: Ананьевский И.М. (Москва), Меликян А.А. (Москва), Хапаев М.М. (Москва).

Секция 6. Управление, теория игр и экономическое поведение.

Руководители: Когут П.И. (Днепропетровск), Курина Г.А. (Воронеж), Жуковский В.И. (Москва), Зеликин М.И. (Москва).

Секция 7. Дискретная математика и информатика.

Руководители: Гуров С.И. (Москва), Сапоженко А.А. (Москва).

По приглашению Оргкомитета на КРОМШ-2005 были прочитаны 63 пятидесятиминутные лекции:

1. Агранович М.С. (Москва, Россия)
Спектральная задача Пуанкаре-Стеклова.
2. Ананьевский И.М. (Москва, Россия)
Число вращения Пуанкаре и его обобщения.
3. Антоневич А.Б. (Минск, Белоруссия)
Об усреднении коэффициентов функциональных операторов.
4. Афендиков А.Л. (Москва, Россия)
О локализации непрерывного и дискретного спектров в задачах об устойчивости фронтов и пульсов.
5. Байрамоглы М., Шахинтурк Х. (Стамбул, Турция)
О высшем следе одного дифференциально-операторного уравнения с собственным значением в краевом условии.
6. Барабанов А.Е. (Москва, Россия)
Синтез $^{\infty}$-оптимальных систем.
7. Баскаков А.Г. (Воронеж, Россия)
Линейные отношения — генераторы полугрупп.
8. Боярский Б. (Польша)
Точечные неравенства Соболева.
9. Бекларян Л.А. (Москва, Россия)
О "правильном"расширении понятия бегущей волны.
10. Березанский Ю.М. (Киев, Украина)
Комплексная проблема моментов.
11. Бригаднов И.А. (Санкт-Петербург, Россия)
Метод предельного анализа в механике сплошных сред.
12. Бурский В.П. (Украина)
Задача Дирихле для уравнения струны, проблема Понселе и уравнение Абеля.
13. Введенская Н.Д. (Москва, Россия)
Динамическая маршрутизация и связанные с ней уравнения.
14. Виноградов М.М. (Москва, Россия)
Что такое дифференциальное исчисление.
15. Власов В.В. (Москва, Россия)
Спектральные задачи, возникающие в теории функционально-дифференциальных уравнений.
16. Власов В.И. (Москва, Россия)
Теория конформного отображения сингулярно деформируемых областей.
17. Волевич Л.Р. (Москва, Россия)
Неизотропные пространства Бесова и линеаризованная задача кристаллизации.
18. Голинский Л.Б. (Харьков, Украина)
Потоки Шура и ортогональные полиномы на единичной окружности.
19. Горбачук М.Л. (Киев, Украина)
О развитии спектральной теории дифференциальных операторов на Украине.
20. Донской В.И. (Симферополь, Украина)
О сложности классов частично рекурсивных функций.
21. Дудов С.И. (Москва, Россия)
Взаимосвязь некоторых задач по оценке множеств.
22. Егорова И.Е. (Харьков, Украина)
Задача рассеяния для матрицы Якоби на квазипериодическом фоне.
23. Жуковский В.И. (Москва, Россия)
Исходы и риски в конфликтных ситуациях при неопределенности.
24. Зеликин М.И. (Москва, Россия)
Операторное двойное отношение и грассманово многообразие Сато.
25. Золотарев В.А. (Полтава, Украина)
Дилатации и функциональные модели коммутирующих систем операторов.

26. Когут П.И. (Днепропетровск, Украина)
Асимптотический анализ одного класса задач оптимального управления в густых сингулярных соединениях.
27. Козлакова Г.А. (Киев, Украина)
Болонский процесс: проблемы интеграции европейского высшего образования.
28. Кондратьев Ю.Г. (Бонн, Германия)
Построение марковских полугрупп для некоторых непрерывных бесконечночастичных систем.
29. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. (Москва, Россия)
Некоторые вопросы спектрального анализа, операторов, связанные с обобщенными якобиевыми матрицами.
30. Кошманенко В.Д. (Киев, Украина)
Построение сингулярных возмущений методом оснащенных гильбертовых пространств.
31. Курина Г.А. (Воронеж, Россия)
Асимптотическое решение периодически сингулярно возмущенной дискретной периодической задачи управления.
32. Левенштам В.Б. (Ростов-на-Дону, Россия)
Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми.
33. Лебедев А.В. (Минск, Белоруссия)
Обращение необратимых динамических систем.
34. Маламуд М.М. (Донецк, Украина)
О связи матрицы рассеяния с функцией Вейля и характеристической функцией.
35. Марченко В.М. (Минск, Белоруссия)
ГДР-системы.
36. Меликян А.А. (Москва, Россия)
Негладкие решения вариационной задачи в кратных интегралах.
37. Мельникова И.В. (Екатеринбург, Россия)
Некорректные дифференциально-операторные задачи. Точные и приближенные решения.
38. Мирзоев К.А. (Москва, Россия)
Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов.
39. Михалевич М.В. (Киев, Украина)
Цикличность экономических процессов.
40. Мышкис А.Д. (Москва, Россия)
Простейшие системы с релаксацией.
41. Нижник Л.П. (Киев, Украина)
Операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями в пространствах Соболева.
42. Овсеевич А.И. (Москва, Россия)
Фильтр Калмана и квантование.
43. Овчинников В.И. (Воронеж, Россия)
Интерполяционные свойства шкал банаховых пространств.
44. Островский В.Л. (Киев, Украина)
Функции на графах и $*$-представления алгебр.
45. Печенцов А.С., Козко А.И. (Москва, Россия)
Следы дифференциальных операторов.
46. Прилепко А.И. (Москва, Россия)
Обратные и нелокальные задачи, прогноз управления, прогноз наблюдения для эволюционных уравнений.
47. Пташник Б.Й. (Львов, Украина)
Краевые задачи для неэллиптических уравнений.
48. Рофе-Бекетов Ф.С. (Харьков, Украина)
Теоремы типа Штурма и теоретико-операторное доказательство теоремы Арнольда о перемежаемости.
49. Самборский С.Н. (Москва-Канн, Россия-Франция)

Монотонность и непрерывность.
50. Самойленко Ю.С. (Киев, Украина)
N-ки подпространств, спектры графов, ...
51. Сапоженко А.А. (Москва, Россия)
Системы контейнеров и перечислительные задачи.
52. Скубачевский А.Л. (Москва, Россия)
Параболические дифференциально-разностные уравнения.
53. Соболевский П.Е. (Израиль)
Some improvement of Hölder result.
54. Солонников В.А. (Санкт-Петербург)
Шаудеровы оценки для решений обобщенной нестационарной задачи Стокса.
55. Хапаев М.М., Терновский В.В. (Москва, Россия)
Модификация уравнений Ландау-Лифшица.
56. Хацкевич В. (Израиль)
Операторные дробно-линейные отношения, приложения к инвариантным дуальным парам линейных операторов.
57. Хромов А.П. (Саратов, Россия)
Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных.
58. Хруслов Е.Я. (Харьков, Украина)
Усредненные модели динамики суспензий.
59. Цекановский Э.Р. (США)
Периодические функции Вейля-Титчмарша и периодические операторы.
60. Чернышов К.И. (Воронеж, Россия)
Приводимость сингулярных линейных отношений.
61. Шамаев А.С. (Москва, Россия)
Некоторые спектральные задачи, возникающие в акустике пористых сред.
62. Шульман В.С. (Вологда, Россия)
Алгебры Ли компактных операторов и топологические радикалы.
63. Штефан Холгер. (Германия)
Обратная задача рассеяния для некоторых параболических уравнений типа Колмогорова-Чепмена и общее описание физических явлений этими уравнениями.

На одиннадцати секционных заседаниях было сделано более 70 докладов. Дневной график работы Школы состоял из трех утренних лекций (9.10 – 10.00, 10.10 – 11.00, 11.10 – 12.00), двух послеобеденных лекций (16.10 – 17.00, 17.10 – 18.00) и вечерних секционных семинаров (с 19.15). Ряд дней, в связи с высокой плотностью научной программы, лекции и семинары проходили параллельно в лекториях верхней и нижней базы (вот уже 11 лет Школу принимает база отдыха "Чайка").

Культурная программа включала многочисленные экскурсии, лекции о Крыме, замечательный концерт на традиционном банкете Школы. Участники Школы отметили целый ряд юбилеев: 80-летие акад. Ю.М. Березанского, 70-летие проф. Л.П. Нижника, 85-летие проф. А.Д. Мышкиса, 70-летие проф. А.П. Хромова, 70-летие проф. Л.Р. Волевича, 65-летие проф. Н.Д. Копачевского, и тепло поздравили юбиляров. Дипломы почетного доктора КРОМШ получили математики, активно участвовавшие в работе десяти Крымских Осенних Школ: Антоневич А.Б., Жуковский В.И., Зеликин М.И., Феллер М.Н., Черных Н.П. Для математиков, активно участвовавших в работе пятнадцати Крымских Осенних Школ, Оргкомитет учредил также диплом почетного академика КРОМШ. Диплом получили: доц. Г.А. Козлакова, чл.-корр. Ю.С. Самойленко, проф. М.М. Маламуд (в ранге чрезвычайного и полномочного проректора КРОМШ), проф. А.Л. Скубачевский. К началу работы КРОМШ-2005 был издан сборник трудов предыдущей Школы "Spectral and Evolution Problems. V.15. — Simferopol, 2005", содержащий 28 статей общим объемом 200 стр. Издана программа проходившей конференции.

Аннотации лекций и докладов, прочитанных на КРОМШ-2005

М. С. Агранович **Спектральные задачи для уравнений типа Шредингера**.

Рассмотрены самосопряженные задачи в ограниченной области G со спектральным параметром в уравнении (или сильно эллиптической системе 2-го порядка). Один из основных результатов: ортонормированный базис из собственных функций в $L_2(G)$ остается безусловным базисом в соболевских пространствах $H^t(G)$ при $0 < t < 3/2$. Это верно не только для областей с гладкими границами, но и для липшицевых областей.

Ананьевский М.С. (Санкт-Петербург, Россия) **Метод скоростного градиента в задаче управления энергией квантовомеханической двухатомной молекулы. Численный эксперимент с молекулой HCl**

В последние годы интерес к задачам управления квантовомеханическими процессами возрастает. По данным журнала Science Citation Index, в начале XXI в. по этой тематике публиковалось более 500 статей в год в рецензируемых журналах. Важным приложением теории управления квантовомеханическими системами являются задачи фемтохимии [1], в частности, задача управления энергией молекулярных связей, посредством воздействия фемтосекундными (1 фемтосекунда $= 10^{-15}$ секунды) лазерными импульсами.

В работе рассматривается задача управления энергией двухатомной молекулы описываемой управляемым уравнением Шредингера с потенциалом Морзе. На основе метода скоростного градиента получен новый алгоритм управления. Для конечномерного приближения доказано, что при выполнении ряда ограничений накладываемых на объект управления, предложенный алгоритм обеспечивает выполнение цели управления. Представленный алгоритм управления является модификацией алгоритма, полученного в работе [2], позволяющей снять некоторые ограничения накладываемые на объект управления.

Эффективность предложенного алгоритма управления продемонстрирована результатами численного моделирования на примере модели молекулы HCl.

Литература

1. E. Brown, H. Rabitz /Some mathematical and algorithmic challenges in the control of quantum dynamics phenomena. J. of Math. Chem. V. 31, N 1, pp. 17–63 (2002).

2. М.С. Ананьевский, А.Л. Фрадков /Управление наблюдаемыми в конечноуровневых квантовых системах. Автоматика и Телемеханика, №5, сс. 63-75 (2005).

Антоневич А.Б. (Минск, Белоруссия) **Об усреднении коэффициентов функциональных операторов**

Функциональными операторами называют операторы, действующие в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X, и имеющие вид

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\ u(\alpha_k(x)), \quad u \in F(X), \tag{1.1}$$

где $\alpha_k : X \to X$ есть заданные отображения, а a_k есть заданные функции.

При исследовании различных конкретных классов уравнений естественным приемом является сведение их исследования к случаю уравнений с более простыми поведением коэффициентов. В теории дифференциальных уравнений имеется по крайней мере два варианта такого сведения – приведение уравнения к каноническому виду и теория усреднения.

В докладе обсуждается следующий вопрос — как может выглядеть аналог теории усреднения или теории приведения к каноническому виду для функциональных операторов? В обоих случая задача заключается в том, чтобы заменить коэффициенты функционального оператора на коэффициенты с более простым поведением (например, на постоянные) таким образом, чтобы сохранить основные свойства исходного оператора. В сформулированном виде задача не является точно поставленной: требует уточнения, что можно в конкретной ситуации считать коэффициентами с более простым поведением, и сохранения каких свойств можно потребовать.

В докладе рассмотрены варианты точной постановки задачи на примере модельных функциональных операторов — операторов взвешенного сдвига, порожденных иррациональным поворотом окружности. В частности, предложено правило усреднения коэффициента, приводящее к оператору, имеющему тот же спектр, что и исходный. При этом в случае достаточно гладких коэффициентов оператор с усредненным коэффициентом оказывается подобным исходному.

Основным результатом является выявление достаточно тонких вопросов, возникающих в связи с поставленной задачей, например, в качестве усредненных коэффициентов приходится рассматривать не только постоянные, но и некоторые другие функции специального вида.

Баскаков А. Г. (Воронеж, Россия) **Линейные отношения - генераторы полугруппы операторов**

Для полугрупп операторов в комплексном банаховом пространстве вводится понятие генератора полугруппы операторов, как линейное отношение на банаховом пространстве. Пересмотрен ряд классических результатов для полугрупп операторов, имеющих особенность в нуле.

Бер А. Ф. (Ташкент, Узбекистан) **О наибольшем однозначном продолжении дифференцирования в коммутативной регулярной алгебре**

Пусть A - коммутативная алгебра с единицей над полем K нулевой характеристики; $\nabla = \nabla(A)$ - булева алгебра идемпотентов в A. Кроме того, пусть A - регулярное кольцо [2]. Через $s(a)$ и $i(a)$ обозначим носитель a и инверсный элемент к a, соответственно, для любого $a \in A$. Мы предполагаем, что на ∇ задана вероятностная строго положительная σ-аддитивная мера μ. Мы рассматриваем метрику $\rho(a,b) = \mu(s(a-b))$ и предполагаем, что (A,ρ) - полное метрическое пространство.

Пусть B - подалгебра в A. Рассмотрим следующие подмножества в A: $L(B)$ - подалгебра, порожденная B и ∇; $J(B) = \{ai(b) : a, b \in B\}$; $C(B)$ - замыкание B в метрике ρ; $Z(B)$ - целое замыкание B; $E(B) = (C \circ Z \circ C \circ J \circ L)(B)$.

Теорема 1. Пусть B - подалгебра в A, $\delta : B \to A$ - дифференцирование, такое, что (*) $s(\delta(a)) \leq s(a)$. Тогда $E(B)$ будет наибольшим элементом в решетке всех таких расширений B в A, что δ продолжается до дифференцирования на данной подалгебре, обладающего свойством (*), единственным образом.

Теорема 2. Пусть $S[0,1]$ - алгебра классов измеримых функций на $[0,1]$; $D[0,1]$ - подалгебра в $S[0,1]$ классов всех почти всюду дифференцируемых функций. Тогда $E(D[0,1])$ совпадает с подалгеброй всех почти всюду аппроксимативно дифференцируемых функций и $E(D[0,1]) \neq S[0,1]$.

Следствие. На $S[0,1]$ существует более одного дифференцирования, продолжающего взятие производной на $D[0,1]$.

Литература

1. А. Ф. Бер, Ф. А. Сукачев, В. И. Чилин / Диффренцирования в коммутативных регулярных алгебрах. Матем.заметки т.75, вып.3 (2004). 2. А. А. Скорняков / Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М.; Физматгиз (1961).

Дмитрук А.В., Кузькина Н.В. (Москва, Россия) **Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени**

На полуинтервале $[0,\infty)$ рассмотрим задачу

$$J = s(x(0)) + \int_0^\infty f(t,x,u)\,dt \;\to \min,$$

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad x(0) \in M_0\,, \qquad x(t) \in A(t), \qquad u(t) \in U(t,x(t))\,.$$

Здесь $x(t)$ есть $n-$мерная функция, абсолютно непрерывная на любом отрезке, $u(t)$ $-$ измеримая r-мерная функция, существенно ограниченная на любом отрезке. Функционал J минимизируется на всех допустимых парах (x,u), на которых интеграл сходится к конечному или бесконечному значению.

Предположения: 1) множество $A(t)$ замкнуто; 2) множество $U(t,x)$ $-$ выпуклый компакт, полунепрерывно сверху зависящий от (t,x); 3) множество M_0 $-$ компакт;
4) функция f аффинна по u и непрерывна по (t,x); 5) тройка f, A, U удовлетворяет условию

роста Филиппова; 6) функция $s(\cdot)$ непрерывна; 7) функция f непрерывна по (t,x,u) и выпукла по u.

Кроме того, примем еще одно предположение относительно поведения функционала на бесконечности. Обычно предполагается, что его "хвосты" абсолютно сходятся к нулю равномерно по всем допустимым траекториям (Магилл, Карлсон, Ори, и др.). Однако это предположение слишком ограничительно. Менее жесткое предположение состоит в том, что семейство функций $\{f^-(t,x(t),u(t))\}$, где $f^- = \max(0,-f)$ сильно равномерно интегрируемо (Балдер), но оно выглядит не очень естественным и трудно проверяемо. Мы предлагаем новое довольно простое условие, которые слабее указанных:

8) Отрицательные части *кусков* функционала сходятся к нулю:

$$\left(\int\limits_{T'}^{T''} f(t,x(t),u(t))\,dt\right)^{-} \to 0 \qquad \text{при } T',\, T'' \to \infty,$$

равномерно по всем допустимым траекториям $(x(t),\, u(t))$. (Здесь $a^- = \max(0,-a)$.)

Теорема. При выполнении предположений 1–8, на любой допустимой паре $J(x,u)$ сходится (в указанном расширенном смысле), причем всегда $J(x,u) > -\infty$, и минимум в поставленной задаче достигается.

Литература

А.В. Дмитрук, Н.В. Кузькина Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Мат. заметки, 2005, т. 78, № 4, с. 503–518.

Дрінь М.М., Дрінь Я.М. **Зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічного псевдодиференціального рівняння зі змінним по t символом**

В шарі $\Pi = (0,T)\times E_n$ розглянемо крайову задачу для параболічного псевдодиференціального рівняння

$$\partial_t u + Au = f, \quad (t,x)\in\Pi, \quad \mu u|_{t=0} = u|_{t=T} + \varphi, x\in E_n, \mu\in E_1, \tag{1}$$

A – псевдодиференціальна операція, побудована за однорідним по σ степеня $\gamma \ge 1$ символом A: $\Pi \to E_1$, визначена в [1] і трактується як гіперсингулярна інтегральна операція. Для $A \equiv A(\sigma)$ ця задача вивчена в [3].

Нехай виконуються умови: 1) φ: $E_n \to E_1$, $\varphi \in C(E)\bigcap L_1(E_n)$; 2) f: $\Pi \to E_1$, $f \in C(0,T)\bigcap C_x^0(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1^0(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \ge (n-1)/\gamma$, $n > 1$ [2].

Розв'язок задачі (1) можна записати в вигляді суми згорток

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} G(t,T,x-\xi,\mu)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} G(t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} G(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi, \tag{2}$$

де

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{E_n} \frac{\exp\{-A(t,\sigma)t + i(x,\sigma)\}}{\mu - \exp\{-A(t,\sigma)T\}}d\sigma, \quad (t,x)\in\Pi, \mu\in E_1. \tag{3}$$

Інтеграл (3) збігається рівномірно і абсолютно в Π при $\mu > 1$ і $\mu < 0$. Якщо $\mu = 1$, то він рівномірно збіжний лише при $n > \gamma \ge 1$.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1), 2), і $|\mu| > 1$ при $n \ge 1$, $\mu = 1$ при $n > \gamma \ge 1$. Тоді розв'язок задачі Діріхле (1) визначається (2).*

Аналогічна теорема є вірною для задачі (1) з умовами Неймана.

1. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **51**, № 5. – С. 909 – 934.

2. *Корбут Л.І., Матійчук М.І.* Про зображення розв'язків нелокальних задач для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 947 – 951.

3. *М.Дрінь, Я.Дрінь.* Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь. – Міжнародна наукова конференція "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (1 – 5 жовтня 2001 р., м.Дрогобич). – Тези доп. – Київ, 2001. – С. 56.

Дрінь С.С. **Еволюційні рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку**

Сингулярні параболічні рівняння з оператором Бесселя відносяться до рівнянь з виродженим по просторових змінних оператором (такі рівняння вироджуються на межі області) і за внутрішініми властивостями вони близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Теорія класичиних розв'язків задачі Коші для таких рівнянь побудована у працях М.І.Матійчука, В.В.Крехівського, С.Д.Івасишена і В.П.Лавренчука, І.І.Веренич та ін. Задача Коші для сингулярних параболічних рівнянь у класах розподілів та у класах узагальнених функцій типу S' (ультрарозподілів) вивчалась Я.І.Житомирським, В.В.Городецьким, І.В.Житарюком, В.П.Лавренчуком. Природним узагальненням таких рівнянь є сингулярні рівняння нескінченного порядку, тобто еволюційні рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку (замість оператора $P(B_\nu) = \sum_{k=0}^{m} c_k B_\nu^k$ рівняння містить оператор $\varphi(B_\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B_\nu^k$, B_ν – оператор Бесселя порядку $\nu > -1/2$). Для таких рівнянь задача Коші не вивчена. У даній роботі розвивається теорія задачі Коші для вказаних рівнянь у більш широких, порівняно з просторами типу S', класах узагальнених початкових функцій нескінченного порядку. При цьому оператор Бесселя нескінченного порядку трактуєтсья як псевдодиференціальний оператор, побудований за певним аналітичним символом.

Простір C_γ^ρ. Нехай $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – монотонно зростаюча послідовність додатних чисел така, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n}/n = 0$, $m_0 = 1$;

2) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \alpha^n$;

3) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall N \in \mathbb{Z}_+ : m_{n+1} \leq M h^n m_n$.

Поряд з цим розглянемо монотонно зростаючу послідовність додатних чисел $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, яка також має властивості 1) - 3), і покладемо

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}, \gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{l_k}{|x|^n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Символом C_γ^ρ в [1] позначається сукупність усіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову $\exists a > 0\ \ \exists b > 0\ \ \exists c > 0\ \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :\ \ |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by)$.

Збіжність у просторі C_γ^ρ визначається так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset C_\gamma^\rho$ називається збіжною до нуля, якщо вона рівномірно збігається до нуля у кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому справджуються нерівності $|\varphi_\nu(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, зі сталими $c, a, b > 0$ не залежними від ν.

В C_γ^ρ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргументу. Мультиплікатором у просторі C_γ^ρ є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність $|f(z)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y)$, $z = x = iy \in \mathbb{C}$.

Простори типу $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho$ та $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho(\mathbb{R})$. Символом $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho$ позначатимемо сукупність усіх цілих парних функцій з простору C_γ^ρ. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або простором типу $\overset{0}{C}$, а його елементи – основними функціями. Відповідно символом $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ позначатимемо підпростір парних функцій простору $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, де $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ – звуження функцій із C_γ^ρ на дійсну вісь. Зазначимо, що у просторі $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho$ коректно визначений оператор $\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}$ (він є неперервним), а у просторі $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ неперервним є оператор $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}$. Отже, правильним є таке твердження.

Лема 1. *У просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ *визначений, є лінійним і неперервним оператор Бесселя* $B_{\nu,z} = \dfrac{d^2}{dz^2} + \dfrac{2\nu+1}{z}\dfrac{d}{dz}$, $z \in \mathbb{C}$, *порядку* $\nu > -1/2$; *у просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$ *лінійним і неперервним є оператор Бесселя* B_ν, *який відповідає дійсній змінній* x.

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя [2]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 - \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}) \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}),$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$.

Лема 2. *Оператор узагальненого зсуву аргмуенту* T_x^ξ *визначений і неперервний у просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

У просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$ можна користуватися прямим і оберненим перетворенням Фур'є-Бесселя, оскільки, як випливає з тверджень А), Б), $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$ є підпростором простору $\overset{0}{S}$ (простір $\overset{0}{S}$ складається з парних функцій простору S Л.Шварца), у якому вказані перетворення визначені коректно [2]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\varphi](\sigma) := \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}),$$

$$\varphi(x) \equiv F_B^{-1}[\psi](x) := c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} dx, \quad \nu > -1/2,$$

де j_ν – нормована функція Бесселя ν-го порядку, $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1})$. Простір $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$ перетворенням Фур'є-Бесселя відображається на простір такого ж типу.

Теорема 1. *Має місце рівність* $F_B[\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})] = \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$, *де*

$$\gamma_1(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1, \\ \exp\{-\gamma^*(\sigma)\}, & |\sigma| \geq 1; \end{cases}, \quad \rho_1(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| < 1, \\ \exp\{-\rho^*(\tau)\}, & |\tau| \geq 1; \end{cases}$$

$\gamma^*(\sigma)$ – *функція, двоїста за Юнгом до функції* $\ln\rho(\sigma+1)$, $\sigma \in [0,+\infty)$; $\rho^*(\tau)$ – *функція, двоїста за Юнгом до функції* $-\ln\gamma(\tau+1)$, $\tau \in [0,+\infty)$; *при цьому оператор* F_B: $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}) \to \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$ *є неперевним.*

Нехай $L(t,z) := \sum\limits_{n=0}^\infty c_{2n}(t) z^{2n}$, $z \in \mathbb{C}$, $t \in [0,T]$, – ціла парна по z функція, $c_{2n} \in C^1([0,T])$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. Говоритимемо, що у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ задано оператор Бесселя нескінченного порядку $L(t; B_{\nu,z}) := \sum\limits_{n=0}^\infty c_{2n}(t)(-B_{\nu,z})^n$, якщо при кожному $t \in [0,T]$ для довільної основної функції $\varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ ряд

$$f(t,z) = (L(t; B_{\nu,z})\varphi)(z) = \sum_{n=0}^\infty c_{2n}(t)((-B_{\nu,z})^n\varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ (тобто $f(t,\cdot) \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ при кожному $t \in [0,T]$). Коректність наведеного означення випливає з наступного твердження.

Теорема 2. *Оператор Бесселя нескінченного порядку* $L(t; B_{\nu,z})$ *визначений і неперервний у просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ *тоді і лише тоді, коли функція* $L(t;\cdot)$ *при кожному* $t \in [0,T]$ – *мультиплікатор у просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, *тобто*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists c_\varepsilon > 0\, \forall z \in \mathbb{C} : \sup_{t\in[0,T]} |L(t,z)| \leq c_\varepsilon(\gamma_1(\varepsilon x)^{-1})\rho_1(\varepsilon y).$$

Наслідок 1. *Якщо* $L(t; B_\nu)$ *– звуження оператора* $L(t; B_{\nu,z})$ *на простір* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, *то для довільної основної функції* $\varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ *правильною є рівність*

$$(L(t, B_\nu)\varphi)(x) = F_B^{-1}[L(t,\xi)F_B[\varphi](\xi)](x), \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}.$$

Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку. Символом $\overset{0}{P}{}^{\rho}_{\gamma}$ позначимо клас цілих парних однозначних функцій $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ і такими, що $e^{\psi} \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$. Розглянемо функцію $\psi(t,z)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, залежну від параметра $t \in [0,T]$ таку, що $\psi(\cdot, z) \in C^1([0,T])$ при кожному $z \in \mathbb{C}$, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \psi_t^{(i)}(t,\cdot) \in \overset{0}{P}{}^{\rho}_{\gamma}$, $i \in \{0,1\}$, $\psi(t,\cdot)$ при кожному $t \in [0,T]$ є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$, $\psi(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(t) z^{2n}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $t \in [0,T]$, у припущенні, що $C_{2n}(t) \in C[0,T], \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Нехай $L(t; B_\nu)$ – оператор, побудований за функцією $\varphi(t,z)$. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(t; B_\nu)u, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+. \tag{1}$$

Для (1) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R}))'. \tag{2}$$

Символом $(\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R}))'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперевних функціоналів над відповідним простором основних функцій.

Під розв'язком задачі Коші (1), (2) розумітимемо функцію $u : (0,T] \ni t \to u(t,\cdot) \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$, *яка диференційовна по* t, *задовольняє рівняння (1) та початкову умову (2) у тому сенсі, що* $u(t,\cdot) \to f$ *при* $t \to +\infty$ *у просторі* $(\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R}))'$. Якщо $f \in (\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}))'$ і $f * \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Для того, щоб задача Коші (1), (2) була коректно розв'язною та її розв'язок и зображався у вигляді* $u(t,x) = (f * G)(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, *необхідно і досить, щоб узагальнена функція* $F_b[f]$ *була згортувачем у просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

Зауваження. *Всі наведені тут результати є правильними і у n-вимірному випадку і анансовані в [3].*

1. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 134. Математика – Чернівці: Рута, 2002. – С. 30 – 37.

2. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейніх уравнений в частніх производніх с дифференциальнім оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, N 2. – С. 299 – 310.

3. *Городецький В.В., Дрінь С.С.* Задача Коші для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку // Доповіді НАН України. – 2003. – № 11. – С. 12 – 17.

Дудов С.И. (Саратов, Россия) **Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром**

Рассматриваются и сравниваются следующие конечномерные задачи по оценке выпуклого компакта шаром некоторой нормы:

1) задача о внешней оценке, под которой понимают построение шара наименьшего радиуса, содержащего оцениваемый компакт, или задачу о чебышевском центре;

2) задача о внутренней оценке, под которой понимают построение шара наибольшего радиуса, содержащегося в оцениваемом компакте, или задачу о вписанном шаре;

3) задача об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем наименьшей толщины;

4) задача о равномерной оценке, под которой понимается наилучшее приближение выпуклого компакта шаром в метрике Хаусдорфа, порожденной используемой нормой.

Показано, что эти задачи можно параметрически связать задачей о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа оцениваемого компакта шаром фиксированного радиуса. Как выяснилось, можно указать диапазоны значений фиксированного радиуса, в которых решения последней задачи дают решения вышеперечисленных. Однако при некоторых значениях радиуса эта задача может иметь самостоятельное значение.

Жуковский В.И. (Москва,Россия) **Исходы и риски в конфликтных ситуациях при неопределенности**

Математическая модель конфликта представлена упорядоченной четверкой $\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, где $\mathbb{N} = \{1,\ldots,N\}$– множество порядковых номеров участников конфликта (игроков); каждый из игроков $i \in \mathbb{N}$ выбирает свою стратегию $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, в результате образуется ситуация $x = (x_1,\ldots,x_N) \in X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$; независимо от выбора игроков реализуется какая-либо неопределенность $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$; на парах $(x,y) \in X \times Y$ определены функция выигрыша i-го игрока $f_i(x,y)$ (значение которой называется *выигрышем*) и функция риска

$$\Phi_i(x,y) = \max_{z_{\mathbb{K}(i)}\in X_{\mathbb{K}(i)}} f_i(x \parallel z_{\mathbb{K}(i)}, y) - f_i(x,y)$$

(значение $\Phi_i(x,y)$ называется *риском*, где $\mathbb{K}(i) \subseteq \mathbb{N}$ включает игрока i); далее $f = (f_1,\ldots,f_N)$ $\Phi = (\Phi_1,\ldots,\Phi_N)$.

Определение 1. *Тройку $(x^e, f^P, \Phi^P) \in X \times \mathbb{R}^{2N}$ назовем гарантированным по выигрышам и рискам равновесием Γ, если существует $y_P \in Y$, для которого $f_i^P = f_i(x^e, y_p)$, $\Phi_i^P = \Phi_i(x^e, y_p)$,*

$$\max_{x_i\in X_i} f_i(x^e \parallel x_i, y_P) = f_i^P \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

и при любых $y \in Y$ несовместна система неравенств

$$f_i(x^e,y) \le f_i^P, \;\; \Phi_i(x^e,y) \ge \Phi_i^P \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

из которых хотя бы одно строгое.

Утверждение 1. (1) $\Rightarrow \min\limits_{x_i\in X_i} \Phi_i(x^e \parallel x_i, y_P) = \Phi_i^P$ $(i \in \mathbb{N})$.

Утверждение 2. Пусть существуют постоянные $\alpha_i \in (0,1)$ $(i \in \mathbb{N})$ и $y_P \in Y$ такие, что

$$\min_{y\in Y} \sum_{i\in\mathbb{N}} [f_i(x^e,y) - \alpha_i \max_{z_{\mathbb{K}(i)}\in X_{\mathbb{K}(i)}} f_i(x^e \parallel z_{\mathbb{K}(i)}, y)] = Idem[y \to y_P].$$

Тогда при любых $y \in Y$ несовместна система неравенств (2).

Пусть $\{\mu\}$- множество вероятностных мер $\mu(\cdot)$ на компакте Y; обозначим $f_i(x,\mu) = \int\limits_Y f_i(x,y)\mu(dy)$, $\Phi_i(x,\mu) = \int\limits_Y \Phi_i(x,y)\mu(dy)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Определение 2. *Тройку $(x^e, \tilde{f}^P, \tilde{\Phi}^P) \in X \times \mathbb{R}^{2N}$ назовем гарантированным по выигрышам и рискам квазиравновесием Γ, если существует $\mu_P(\cdot) \in \{\mu\}$, для которого $\tilde{f}_i^P = f_i(x^e, \mu_p)$, $\tilde{\Phi}_i^P = \Phi_i(x^e, \mu_p)$ $(i \in \mathbb{N})$, $\max\limits_{x_i\in X_i} f_i(x^e \parallel x_i, \mu_P) = \tilde{f}_i^P$ $(i \in \mathbb{N})$ и при любых $y \in Y$ несовместна система неравенств $f_i(x^e,y) \le \tilde{f}_i^P$, $\Phi_i(x^e,y) \ge \tilde{\Phi}_i^P$ $(i \in \mathbb{N})$, из которых, по крайней мере, одно строгое.*

Теорема. Если $X_i \in Conv(\mathbb{R}^{n_i})$, $Y \in Comp(\mathbb{R}^m)$, $f_i(x,y) \in C(X \times Y, \mathbb{R})$ и вогнуты по x_i $(i \in \mathbb{N})$. Тогда в Γ существует гарантированное по выигрышам и рискам квазиравновесие.

Журавлев Н. Б. (Москва, Россия) **О гиперболичности медленно осциллирующих периодических решений некоторого класса функционально дифференциальных уравнений**

Рассматривалось нелинейное функционально-дифференциальное уравнение

$$x'(t) = f(x(t), (t-1), \ldots, x(t-n)). \tag{1}$$

Предполагалось, что известно периодическое решение $x(t)$ этого уравнения с рациональным периодом $p = N/K > n$. Периодическое решение называется гиперболическим если оператор монодромии имеет на единичной окружности единственное простое собственное значение равное 1. Пусть уравнение

$$v'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t)v(t-k) \qquad (t \in [0,\infty))$$

получено линеаризацией уравнения (1) в окрестности исследуемого периодического решения. Оператор монодромии действует по формуле $M\phi(t) = v^{\phi}(t+p)$ $(t \in [-n, 0])$, где v^{ϕ} — решение линеаризованного уравнения с функцией ϕ в качестве начальных данных. Известно [1], что любая траектория, близкая к периодической орбите гиперболического решения либо наматывается на данную периодическую орбиту при $t \to \infty$ либо сматывается при $t \to -\infty$. Поскольку действие оператора монодромии определяется с помощью решения начальной задачи для функционально-дифференциального уравнения, то исследование его собсвенных значений затруднительно.

Сообщение было посвящено обобщению результатов, полученных в работе [2], где рассматривалось уравнение с правой частью, содержащей только одно запаздывание. Была получена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью решения этой задачи была построена матрица $Q(\lambda)$ и аналитическая функция $q(\lambda) = \mathrm{det}Q(\lambda)$ и доказана

Теорема 1. Ненулевые собственные значения оператора монодромии совпадают с нулями аналитической функции $q(\lambda)$.

В этой теореме было снято дополнительное условие, использовавшееся в работе [2]. Это условие линейной независимости первых K столбцов матрицы $Q(\lambda)$. Была доказана также теорема о том, что при некоторых дополнительных условиях алгебраическая кратность собственных значений оператора монодромии совпадает с кратностью нулей функции $q(\lambda)$.

Литература

1. J. Hale / Theory of functional differential equations. (1977).

2. Х.-О. Вальтер, А. Л. Скубачевский / О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. т. 64 (2003).

Загорский А.С. (Воронеж, Россия) **К спектральной теории линейных отношений на вещественных банаховых пространствах**

В большинстве известных монографий, в которых подробно излагается, либо существенно используется спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах, их авторы, как правило, предполагают, что эти пространства являются комплексными, либо указывают на возможность комплексификации вещественного банахова пространства. Тем не менее при построении спектральной теории линейных операторов в вещественных банаховых пространствах иногда необходимо подробно отслеживать переход в комплексификацию пространства и обратный переход.

В докладе рассматриваются некоторые вопросы спектральной теории линейных отношений (многозначных линейных операторов) и, в частности, линейных операторов на вещественных банаховых пространствах. Рассматривается структура инвариантных подпространств. Также получена вещественная спектральная теорема и утверждение о том, что проектор Рисса для коплексификации линейного отношения, построенный по спектральной компоненте является комплексификацией некоторого проектора тогда и только тогда, когда спектральная компонента симметрична относительно вещественной оси.

Литература

1. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов / Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. Матем. сб. 2002 Т.193, №11, с. 3-35.

Картак В.М. (Уфа, Россия) **Задача оптимального раскроя**

Рассматривается задача двумерной прямоугольной упаковки (two-dimensional bin packing problem, 2DBPP). В полубесконечной полосе необходимо упаковать (разместить) m прямоугольников R_i, $(i = 1, \ldots, m)$ заданных размеров. Прямоугольники размещаются без наложения и их края параллельны краям полосы. Требуется найти упаковку, занимающую минимальную часть полосы. Задача 2DBPP является NP-трудной. Для ее решения известны немногие точные алгоритма типа ветвей и границ. Они позволяют находить оптимальное решение для небольшого количества различных прямоугольников.

Автором предлагается переборный метод на базе блочных структур прямоугольной упаковки. Количество блок-структур для 2DBPP равно двум.

Поясним как упаковка представляется блок-структурами. Выполним мысленно вертикальные резы, проходящие через правые стороны прямоугольников R_i. Полученные таким образом вертикальные полосы будем называть *вертикальными блоками.* Аналогично выполним мысленно горизонтальные резы, проходящие через верхние стороны прямоугольников. Мы получим *горизонтальные блоки.* Представления упаковки последовательностями блоков (вертикальных и горизонтальных) назовем *блок-структурами упаковки.*

Теперь построим матрицы и векторы блок-структуры. Каждой блок-структуре отвечает бинарная матрица A. Ее элемент $a_{ij} = 1$, если i-й прямоугольник пересекается с j-м блоком и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Вектор блок-структуры содержит информацию о длине (ширине) вертикальных (горизонтальных) блоков.

Предлагается алгоритм поиска оптимального решения на базе блок-структур упаковки. Его идея заключается в том, что на каждом шаге ищется упаковка с меньшей длиной занятой полосы, чем было получено на предыдущем. Процесс поиска повторяется до тех пор, пока не будет достигнута нижняя граница (в этом случае лучшего решения быть не может) или не удалось найти улучшение. В силу конечного числа прямоугольников и учитывая, что рассматриваются только плотные упаковки, процесс поиска оптимальной упаковки будет конечным. Как видно из краткого описания алгоритма, для нахождения допустимых упаковок необходимо строить пары (A_1, Z_1) и (A_2, Z_2). Для решения этой задачи можно использовать модифицированный алгоритм ветвей и границ, применяемый для поиска оптимального решения задачи линейного раскроя [1,2].

Алгоритм легко трансформируется на задачу упаковки n-мерных параллелепипедов, при этом количество блок-структур станет равным n. Кроме того возможны его модификации и на некоторые специальные случаи упаковки геометрических объектов сложной формы.

Литература

1. E.A.Mukhacheva, G.N.Belov G.N, V.M.Kartak, A.S.Mukhacheva / Linear one-dimensional cutting problems: numerical experiments with the sequential value correction method and a modified branch-and-bound method. Pesquisa Operacional. V.20(2). Pp. 153-169 (2000).

2. Э.А.Мухачева, В.М.Картак / Модифицированный метод ветвей и границ: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя. Информационные технологии. V. 9. Pp. 15-22 (2000).

Ковтун И.И. **О моментах решения уравнения Риккати со случайными коэффициентами**

Получены дифференциальные уравнения для нахождения среднего и ковариационной функции решения уравнения Риккати со случайными коэффициентами. Использована связь уравнения Риккати с дифференциальным уравнением второго порядка.

Кордюкова С. А. (Уфа, Россия) **Метод многих масштабов для приближенного уравнения Буссинеска**

Рассматривается приближенное уравнение Буссинеска

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{g}\psi_{tt} + h_0\psi_{xx} + \frac{\varepsilon^2}{g}\left[\frac{1}{3}h_0^3 g\psi_{xxxx} - 2\psi_x\psi_{tx} - \psi_t\psi_{xx}\right] \\
+\varepsilon^4\Big[\frac{-h_0^2}{g}(\psi_{40}\psi_t + 2\psi_{xxx}\psi_{tx} + 2\psi_{xx}\psi_{txx}) \\
-\frac{3}{2g}\psi_{xx}\psi_x^2 + \frac{h_0}{g^2}(\psi_{tt}\psi_{xx})_t + \frac{2}{15}h_0^5\psi_{xxxxxx}\Big] = 0, \quad (1)
\end{aligned}
$$

выведенное из уравнений мелкой воды

$$
\phi_{xx} + \varepsilon^{-2}\phi_{yy} = 0
$$
$$
h_t + h_x\phi_x - \varepsilon^{-2}\phi_y = 0, \text{ при } y = h(t,x).
$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\phi_y^2 + gh = 0, \text{ при } y = h(t,x).$$

В уравнении (10) сделаем замену

$$X = t - \frac{x}{\sqrt{h_0 g}}, \quad Y = t + \frac{x}{\sqrt{h_0 g}}, \quad t = t, \quad \psi = -\frac{h_0^2}{9}u, \quad \varepsilon = \frac{6g}{h_0}\varepsilon_1,$$

и введем медленные переменные по формулам

$$\tau = \frac{1}{2}\varepsilon(X+Y), \quad T_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2(X+Y), \quad T_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2(X-Y).$$

Найдено асимптотическое решение уравнения (10) в виде ряда по степеням ε:

$$u = a(X,\tau,T_1,T_2) + b(Y,\tau,T_1,T_2) + \varepsilon(-\frac{1}{6}(ab_Y + ba_X) + a_1 + b_1) + \dots,$$

где $a(X,\tau,T_1,T_2)$, $b(Y,\tau,T_1,T_2)$ удовлетворяют системе уравнений КдФ-иерархии

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{1}{2}a_X^2 + a_{XXX} \\ a_{T_1} - a_{T_2} &= \frac{1}{2}\frac{a_X^3}{3} + \frac{a_{XX}^2}{2} + a_X a_{XXX} + \frac{3}{5}a_{XXXXX}, \\ b_\tau &= \frac{1}{2}b_Y^2 + b_{YYY} \\ b_{T_1} + b_{T_2} &= \frac{1}{2}\frac{b_Y^3}{3} + \frac{b_{YY}^2}{2} + b_Y b_{YYY} + \frac{3}{5}b_{YYYYY}. \end{aligned}$$

Корнев В.В. **Об абсолютной равномерной сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов**

В статье устанавливается аналог теоремы Саса об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье для разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы на диагоналях.

Матвеев В. А. (Псков, Россия) **Многокритериальная задача: оптимальность по конусу и уточнение**

Рассматривается многокритериальная задача

$$\langle X, f(x)\rangle. \tag{2}$$

Используем терминологию и обозначения из [1]. Задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$ и выделен конечный набор желаемых свойств. В модели они представлены векторной функцией выигрыша $f(x)$. На содержательном уровне, цель состоит в выборе такого исхода, что доставляет возможно большие значения одновременно всем компонентам $f_i(x), i = 1, ..., m$ векторной функции $f(x)$.

Достаточно общий подход к определению оценочной структуры в (1) предлагает отношение предпочтения по конусу в критериальном пространстве $R^m, m \geq 1$. Будем рассматривать выпуклый, пространственный, многогранный конус K . Конус порождает в векторном критериальном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq_k$ по правилу

$$f \geq_k g \Leftrightarrow f - g \in K.$$

Рассматривается многокритериальная задача (1) и многогранный конус K, определённый квадратной матрицей A порядка m. Пусть вектор $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_m), \sum_{i=1}^m a_i = 1, \qquad a_i > 0$, является левым собственным вектором для собственного значения $\lambda = 1$ этой матрицы . Тогда исход

$$x^* \in \arg\max_{x \in X}(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_m f_m(x))$$

будем называть *уточнённым по конусу оптимальным решением* многокритериальной задачи (1).

Теорема. *Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f : X \to R^m$ непрерывна, квадратная матрица A порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует уточнённое по конусу, порождённому матрицей A, оптимальное решение.*

Литература

1. В.В. Подиновский, В.Д. Ногин . Парето - оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука (1982).

Новиков В.В. (Саратов, Россия) **Интерполяционный аналог теоремы Д.Е.Меньшова об исправлении функции**

Пусть $\alpha, \beta >$ -1 и $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке [-1,1] с весом $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$; $-1 < x_{n,n} < x_{n-1,n} < \ldots < x_{1,n} < 1$ -нули $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Обозначим через $L_n{}^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий функцию f в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$.

В 1940 году Д.Е.Меньшов [1] доказал классическую теорему о наличии у измеримой почти всюду конечной функции так называемого усиленного C-свойства: для любой периодической функции f указанного вида и любого $\epsilon > 0$ существует функция g, такая что $f = g$ на некотором множестве $E \subset [0, 2\pi]$, $\mu E > 2\pi - \epsilon$, и тригонометрический ряд Фурье $\sigma(g)$ сходится равномерно на $[0, 2\pi]$. Аналогичный результат верен и для рядов Фурье-Якоби.

Известно [2], [3], что интерполяционный процесс $\{L_n{}^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\}$ непрерывной функции может расходиться всюду. Поэтому представляет интерес вопрос о наличии усиленного C-свойства у произвольной функции $f \in C[-1,1]$ по отношению к указанному интерполяционному процессу.

Теорема. Для любых $\alpha, \beta > -1, \epsilon > 0$, $f \in C[-1,1]$ и любого отрезка $[a,b] \subset (-1,1)$ существует функция g, такая что $f = g$ на некотором множестве $E \subset [a,b]$, $\mu E > b-a-\epsilon$, и интерполяционный процесс $\{L_n{}^{(\alpha,\beta)}(g,\cdot)\}$ сходится к g равномерно на $[a,b]$.

Литература

1.Д.Е.Меньшов/Sur les séries de Fourier des fonctions continues. MC, 8(50) (1940), 493-518.

2.G.Grünwald/ Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen. Ann. Math. 37 (1936), 908-918.

3.J.Marcinkiewicz/ Sur la divergence des polynomes d'interpolation. Acta Litt. Sci. Szeged 8 (1936/37), 131-135.

Прилепко А. И. (Москва, Россия) **Обратные нелокальные задачи. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение для эволюционных уравнений**

Даны 2 точки $T, T_0 \in \mathbb{R}$, $0 < T \leqslant T_0 < +\infty$; банаховы пространства E и E^*, операторы A, $\Phi(t)$, $A^*, \Phi^*(t)$.

1^0. Обратная задача или задача "прогноз-управление".
Найти пару $u(t)$ и параметр $p \in E$ из условий (1) – (2).

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv \dot{u} = Au(t) + \Phi(t)p, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \quad u(0) = \varphi_0; \tag{1}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(t)d\mu(t) = \varphi_1. \tag{2}$$

В (1) – (2) заданы φ_0, φ_1 и $\mu(t)$ – функция ограниченной вариации, причем $l(u) \not\equiv u(0) \cdot const$.

2^0. Нелокальная задача или задача "прогноз-наблюдение".
Найти пару $z(t)$ и параметр $p^* \in E^*$ из условий (3) – (4).

$$\dot{z}(t) = A^* z(t), \quad 0 < t < T_0, \quad z(0) = p^*; \tag{3}$$

$$\int_0^T \Phi^*(T-t)z(t)t = g^*, \quad g^* \in E^* \text{ – задан.} \tag{4}$$

В (1) – (2) заданы φ_0, φ_1 и $\mu(t)$ – функция ограниченной вариации, причем $l(u) \not\equiv u(0) \cdot const$.

Прямой нелокальной по времени задачей называем задачу нахождения $z(t)$ из условий (4) – (5).

$$\dot{z}(t) = A^* z(t) + f_*(t), \quad 0 < t < T_0, \quad f_*(t) \ - \ \text{дана}. \tag{5}$$

В задачах (4) – (5) вместо начального условия $z(0) = \varphi^*$ задается "среднее операторное" условие (4) от $z(t)$ на заданном интервале $(0,\ T)$, (возможно, малом: $0 < T << T_0$).

Найдены достаточные условия корректной разрешимости указанных задач, в частности, при ряде дополнительных условий доказывается, что корректность задачи (1) – (2) эквивалентна корректности задачи (3) – (4).

Литература

1. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin / Methods for solving inverse problems in mathematical physics – Marcel Dekker inc., New York-Basel, 2000. – 709 p.

Рыхлов В.С. **О полноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче**

В статье исследуются вопросы о кратной полноте и неполноте собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2[0,1]$ пучка обыкновенных дифференциальных операторов, порожденным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами, корни характеристического уравнения которого лежат на одном луче, и полураспадающимися однородными краевыми условиями.

Хатько, В.В. **О некоторых спектральных свойствах линейных отношений**

Статья посвящена некоторым вопросам спектральной теории линейных отношений (многозначных линейных операторов). Рассматривается классификация спектра линейного отношения. Вводится понятие фактор-отношения, с помощью которого формулируется один из результатов статьи.

Хромов А.П. (Саратов, Россия) **Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях**

Пусть A интегральный оператор:

$$Aqf = \int\limits_0^1 A(x,t)f(t)dt,$$

ядро $A(x,t)$ которого допускает разрывы первого рода на любых ломаных, звенья которых представляют собой стороны или диагонали n^2 квадратов, получаемых равномерным разбиением горизонтальными и вертикальными линиями основного квадранта $[0,1] \times [0,1]$ переменных x и t. Вне ломаных ядро $A(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по обеим переменным, а скачки $A(x,t)$ на каждом звене ломаных принимают постоянные значения. Для таких операторов найдены условия, обеспечивающие равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям оператора A и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Mehmet Bayramoglu and Hulya Sahinturk Yildiz (Istanbul, Turkey) **The Higher Trace of a Differential-Operator Equation with Boundary Condition Contained Eigenvalue**

We obtained the n'th ($n \geq 2$) order regularized trace formula for the boundary value problem

$$\ell[y] = -y'' + Q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{1.1}$$

$$y'(0) = 0 \tag{1.2}$$

$$-y(1) = \lambda y'(1) \tag{1.3}$$

in the Hilbert space $H_1 = L_2([0,1],H)$, where H denotes the separable Hilbert space, λ is a complex parameter. $Q(x)$ appearing in (1.1) is an operator function acting in H and satisfies the following conditions together with some other conditions: $Q(x)$ has $2n$'th weak derivatives in $[0,1]$ and

$Q^{(j)}(x) \in \sigma_1(H)$ ($\sigma_1(H)$ denotes the space of the nuclear operators acting in H), $[Q^{(j)}(x)]^* = Q^{(j)}(x)$, $(j = 0, 1, ...2n)$; $\|Q(x)\|_{H_1} < \frac{1}{2}\min_m(\mu_{m+1}) - \mu_m)$, where $\mu_1 < 0 < \mu_2 < .....$ are the roots of the equation $\cos\sqrt{\mu} = \mu^{3/2}\sin\sqrt{\mu}$; there exists an orthonormal basis $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ of the space H such that $\sum_{n=1}^{\infty}\|Q(x)\phi_n\|_{H_1} < \infty$.

Bogacheva Yu.V. (g.Voronezh, Russia), Glushak A.V.(g.Belgorod, Russia) **About one abstract differential equation with changeable factors**

Following problem is considered in Banachian space E

$$tD^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(t^{1-\alpha}u(t)\right) = u_0, \tag{4}$$

where A — linear closed operator with thick in E area determinations $D(A)$,

$$D^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds$$

— leftside fractional derivative Rimana-Liuvillya of order $\alpha \in (0,1)$ (см. [1, с. 41]), $\Gamma(\cdot)$ – gamma-function Eylera.

We shall expect that, $A = (-B)^{\alpha}$, where B — generator evenly limited semi-groups $T(t, B)$. Then, as we known [2, с. 357], operator $-A$ is generator evenly limited semi-groups

$$T_{\alpha}(t, -A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty} ds \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(zs - tz^{\alpha})T(s, B)\ dz.$$

Theorem 1. Let $u_0 \in D(A)$, analytic semi-group $T_{\alpha}(t, -A)$ in sector, containing points $\lambda^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, where $\lambda = \sigma + i\tau$, $\sigma > 0$, $\tau \in \mathbf{R}$ and for it equitable estimation $\|T_{\alpha}(t, -A)\| \le M\ \exp(\omega t)$, $M \ge 1$, $\omega < 0$. Then function

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{-\alpha}\exp(-\lambda t)T_{\alpha}(b\lambda^{\rho}, -A)\, u_0\ dt, \tag{5}$$

under $\rho = 1-\alpha$, $b\rho = 1$, is a unique decision of the problem (1), (2).

In particular, under $\alpha = 1/2$ integral in (3) is calculated and we get

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, T\left(\frac{1}{t}, B\right)u_0.$$

Literature

1. S.G.Samko, L.L.Kilbas, O.I.Marichev / Integrals and derived the fractional order and some their application. Minsk. Science and technology, 1987.

2. K.Iosida / Functional analysis. Moscow: The World, 1967.

Burskii V.P., Zhedanov A.S. (Donetsk, Ukraine) **Boundary value problems, Poncelet problem, and Pell-Abel equation**

The report was devoted to a connection between ill-posed boundary value problems in a bounded semialgebraic domain for partial differential equations and the Poncelet problem, recently revealed by authors. The Poncelet problem is one of famous problems of projective geometry and it by itself has numerous links with a set of different problems of analysis and physics. The solution uniqueness of the Dirichlet problem for the string equation $u_{xy} = 0$ in Ω, $u|_C = \phi$ on $C = \partial\Omega$ in a bounded domain Ω is connected with properties of John automorphism $T : \partial\Omega \to \partial\Omega$. We consider this problem in a bounded semialgebraic domain, the boundary of which is given by some bi-quadratic algebraic curve $x^2y^2 + a(x^2 + y^2) + 2bxy + 1 = 0$. We show the John mapping in this case is the same as Ponselet mapping in rational parametrizations of some conics. From it we obtain

Theorem. The Dirichlet problem in such domain has non-unique solution if and only if corresponding Poncelet problem has periodic trajectory.

We obtain a criterion of uniqueness breakdown for above the Dirichlet problem in the following form: periodicity condition for the John algorithm is $qN = 2\omega_1 m_1 + 2\omega_2 m_2$, where N, m_1, m_2 are integers, periods ω_1, ω_2 and the number q can be counted up on data. In turn the solution uniqueness of the Dirichlet problem is equivalent to solution uniqueness of some class of boundary value problems for the same equation on C and is equivalent to an indeterminacy of some moment problem on C: $\exists \alpha(s) \neq 0, \forall k = 0, 1, \ldots \int_C [x(s)]^k \alpha(s)\, ds = \int_C [y(s)]^k \alpha(s)\, ds = 0$, where (x, y) are Cartesian coordinates of point on C parametrized by s. Except for that a Cayley determinant criterion of periodicity of Poncelet problem for case of even period can be understood as a criterion (by Malyshev) of solvable for algebraic Pell-Abel equation $P^2 - RQ^2 = 1$, where for given polinomial R of the order 4 it is required to find polinomials P, Q. The last problem has connections with a lot of different problems of analysis also.

M. V. Markin (Fresno, California, USA) **On the Carleman Classes of Vectors of a Scalar Type Spectral Operator**

Let a sequence $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ be subject to the following condition: for any $\alpha > 0$, there exists such a $C = C(\alpha) > 0$ that

$$C\alpha^n \leq m_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{6}$$

Then the numerical function $T(\lambda) := m_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^n}{m_n}, \quad 0 \leq \lambda < \infty$, first introduced by S.Mandelbrojt [1], is well defined.

Theorem. *Let A be a scalar type spectral operator in a complex reflexive Banach space X and $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence satisfying condition* (6)*. Then*

$$C_{\{m_n\}}(A) = \bigcup_{t>0} D(T(t|A|)),$$
$$C_{(m_n)}(A) = \bigcap_{t>0} D(T(t|A|)),$$

where $C_{\{m_n\}}(A)$ and $C_{(m_n)}(A)$ are the Carleman classes of vectors of the operator A corresponding to the sequence $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ [2, 3, 4]*, the operators $T(t|A|)$ $(0 < t < \infty)$ defined in the sense of the operational calculus for a scalar type spectral operator and the function $T(\cdot)$ being replaceable by any non-negative, continuous, and increasing function $L(\cdot)$ defined on $[0, \infty)$ such that*

$$c_1 L(\gamma_1 \lambda) \leq T(\lambda) \leq c_2 L(\gamma_2 \lambda), \quad \lambda > R,$$

with some positive γ_1, γ_2, c_1, c_2, and a non-negative R.

This theorem generalizes the corresponding result for a *normal operator* in a complex Hilbert space [2] (see also [3, 4]). A complete proof can be found in [5].

Observe that the inclusions

$$C_{\{m_n\}}(A) \supseteq \bigcup_{t>0} D(T(t|A|)),$$
$$C_{(m_n)}(A) \supseteq \bigcap_{t>0} D(T(t|A|))$$

are valid regardless whether the space X is reflexive.

References

[1] S. Mandelbrojt, *Series de Fourier et Classes Quasi-Analytiques de Fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1935.

[2] V.I. Gorbachuk, *Spases of infinitely differentiable vectors of a non-negative selfadjoint operator*, Ukr. Math. J. **35** (1983), 531–535.

[3] V.I. Gorbachuk and A.V. Knyazyuk, *Boundary Values of Solutions of Operator-Differential Equations*, Russ. Math. Surveys **44** (1989), 67–111.

[4] M.L. Gorbachuk and V.I. Gorbachuk, *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[5] M.V. Markin, *On the Carleman classes of vectors of a scalar type spectral operator*, Int. J. Math. Math. Sci. **2004** (2004), no. 60, 3219–3235.

Ovchinnikov V.I. (Voronezh, Russia) **Interpolation properties of Banach scales**

We denote by X_α, where $0 < \alpha < 1$, a family of intermediate spaces for a Banach couple $\{X_0, X_1\}$. This family is called interpolation scale between X_0 и X_1, if for all $\alpha \in (0,1)$ we have that X_α is an interpolation space between X_0 and X_1 such that

$$\|T\|_{X_\alpha} \leq C_\alpha \|T\|_{X_0}^{1-\alpha} \|T\|_{X_1}^{\alpha}$$

for any bounded linear operator mapping the couple $\{X_0, X_1\}$.

The restriction of X_α to an interval (α_0, α_1) turns out to be a family of intermediate spaces for the couple $\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$. We study if X_α is an interpolation scale between X_{α_0} and X_{α_1} with corresponding change of variables. It is well known that we have an affirmative answer for classical the Lions-Peetre scales and for the complex scale. The corresponding theorems are called reiteration theorems.

In general X_α may happen not to be an interpolation space between X_{α_0} and X_{α_1}. However we show that for rather large class of Banach couples $\{X_0, X_1\}$ we have that X_α is an interpolation space between X_{α_0} and X_{α_1} for arbitrary interpolation scale between X_0 and X_1. We show also that an analogue of the Arazy–Cwikel theorem [1] on description of interpolation spaced is valid for such scales.

The main results are as follows.

Theorem 1. Let X_α be interpolation scale between $X_0 = L_{p_0}(U_0)$ and $X_1 = L_{p_1}(U_1)$, where $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, and U_0, U_1 are any weights. Then for any $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \leq 1$ the space X_α is an interpolation space between X_{α_0} and X_{α_1} such that

$$\|T\|_{X_\alpha} \leq C_\alpha \|T\|_{X_{\alpha_0}}^{1-\theta} \|T\|_{X_{\alpha_1}}^{\theta}$$

where $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ for any linear bounded operator $T : \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\} \to \{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}$.

Denote by $\mathrm{Int}(\{X_0, X_1\})$ the set of all interpolation spaces for a couple $\{X_0, X_1\}$.

Theorem 2. Let $X_0 = L_{p_0}(U_0)$, $X_1 = L_{p_1}(U_1)$, where $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, and U_0, U_1 are weight functions. Then for any interpolation scale between X_0 and X_1 we have

$$\mathrm{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \mathrm{Int}(\{X_0, X_{\alpha_1}\}) \cap \mathrm{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_1\})$$

for any $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1$.

In particular Theorem 1 and Theorem 2 can be applied to any interpolation scale between Hilbert spaces X_0 and X_1.

The similar statements are true for couples of more general nature.

Let $\{A_0, A_1\}$ be arbitrary Banach couple, and $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ be the Lions–Peetre spaces, where $0 < \theta < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$.

Theorem 3. Let X_α be interpolation scale between $X_0 = (A_0, A_1)_{\theta_0,p_0}$ and $X_1 = (A_0, A_1)_{\theta_1,p_1}$. Then for any intervals $[\alpha_0, \alpha_1] \subset [\beta_0, \beta_1] \subset [0,1]$ we have

$$\mathrm{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}\}) = \mathrm{Int}(\{X_{\beta_0}, X_{\alpha_1}\}) \cap \mathrm{Int}(\{X_{\alpha_0}, X_{\beta_1}\}).$$

The main results are joint with Yu.N.Bykov.

References

1. Y.Arazy, M.Cwikel / On the description of interpolation spaces between L_p and L_q. Ark. Mat. V. 55 (1984), 253–270.

M. Sobolevski, P. Sobolevski (Jerusalem, Israel) **Some improvements of Holder results**

The new method of investigation of some limit cases in Holder inequality for sums and integrals are presented. This method permits to establish some correlations between the velocities of divergence of the corresponding sums and integrals.

Tsekanovskii E. (Niagara University, USA) **Periodic Weyl-Titchmarsh functions and periodic operators**

We consider a certain class of Herglotz-Nevanlinna matrix-valued functions which can be realized as the Weyl-Titchmarsh matrix-valued function of some symmetric operator and its self-adjoint extension.

New properties of Weyl -Titchmarsh matrix-valued functions as well as a new version of the functional model in such realizations are presented. In the case of periodic Herglotz-Nevanlinna matrix-valued functions, we provide a complete characterization of their realizations in terms of the corresponding functional model and establish important existence theorem. The properties of a symmetric operator and its self-adjoint extension which generate a periodic Weyl-Titchmarsh matrix-valued function are established. We study pairs of operators (a symmetric operator and its self-adjoint extension) with constant Weyl-Titchmarsh matrix-valued functions and establish connections between such pairs of operators and representations of the canonical commutative relations of Quantum Mechanics for unitary groups of operators in Weyl's form. As a consequence of such an approach we obtain the Stone-von Neumann theorem for two unitary groups of operators satisfying the commutation relations as well as some extension and strengthening of the classical functional model for generators of those groups. Our examples include the Schrödinger operator with linear potential and its perturbation by bounded periodic potential. This talk is based on joint work with M.Bekker.

References

1. M. Bekker, E. Tsekanovskii, On Periodic Matrix-Valued Weyl-Titchmarsh Functions. Journal of Math. Anal. Appl. **294**(2004), 666-686.

ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Пташник Б.Й., Симотюк М.М.
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України,
Львів, Україна

§1. Постановка задачі та формулювання основних результатів

Розглянемо таку задачу типу задачі Діріхле:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{2n-1} A_j(D_x)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega_p, \tag{7}$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \dfrac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j=1,\ldots,n, \quad x\in\Omega_p, \\ U_{n+j}[u] \equiv \dfrac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad j=1,\ldots,n, \quad x\in\Omega_p, \end{cases} \tag{8}$$

де $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_p$, Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $A_j(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^p$, — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня N_j, $N_j\in\mathbb{N}$, $j=0,1,\ldots,2n-1$. Нехай $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, де $\omega,\delta\in\mathbb{R}$, $\gamma=\max\limits_{0\le j\le 2n-1}\{N_j/(2n-j)\}$, — простір 2π-періодичних за змінними $x_1,\ldots,x_p$ функцій $\varphi(x)=\sum\varphi_k\exp(ik_1x_1+\ldots+ik_px_p)$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi;W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma})}, \quad |k|=|k_1|+\ldots+|k_p|.$$

При дослідженні розв'язності задачі (7), (8) в просторах функцій, 2π-періодичних за змінними $x_1,\ldots,x_p$, виникає такий визначник:

$$\Delta(k,T) = \det\|U_j[f_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{2n}, \quad k\equiv(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p, \tag{9}$$

де $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt}, k\right) y(t) = 0, \quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{10}$$

що $f_q^{(j-1)}(0,k)=\delta_{jq}$, $j,q=1,\ldots,2n$ (δ_{jq} — символ Кронекера). Якщо $\Delta(k,T)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, то задача (7), (8) має єдиний розв'язок, який зображується формальним рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\sum_{j,q=1}^{2n}\frac{\Delta_{jq}(k,T)}{\Delta(k,T)} f_q(t,k)\varphi_{jk}\exp(ik_1x_1+\ldots+ik_px_p), \tag{11}$$

де $\Delta_{jq}(k,T)$, $j,q=1,\ldots,2n$, — алгебричне доповнення елемента $U_j[f_q(t,k)]$ у визначнику $\Delta(k,T)$, а φ_{jk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,2n$.

Якщо $\Delta(k,T)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, і, крім того, існують $\omega,\delta\in\mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k,T)| \ge (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma}), \tag{12}$$

то на основі відомих оцінок [14, с. 162] для функцій $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, можна встановити збіжність ряду (11) в шкалі просторів $C^{2n}([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, якщо $\varphi_j\in W^{\gamma}_{\alpha_0,\beta_0}$, $j=1,\ldots,2n$, для певних $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$. Тому важливим є дослідження питання про можливість виконання нерівності (12). Це і є завданням даної роботи.

Для формулювання отриманих результатів введемо наступні позначення: $C(2n,n)$ — множина всіх наборів $\omega=(i_1,\ldots,i_n)$, складених з n натуральних чисел $i_1,\ldots,i_n$ таких, що $1\le i_1<\ldots<i_n\le 2n$; $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{m(k)}(k)$, $m(k)\le 2n$, — різні корені рівняння

$$L(\lambda,k)=0,\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{13}$$

кратностей $n_1(k),\ldots,n_{m(k)}(k)$ відповідно, $\sum_{j=1}^{m(k)} n_j(k)=2n$; $m_0(k)=0$, $m_j(k)=\sum_{q=1}^{j} n_q(k)$, $j=1,\ldots,m(k)$;

$$g_q(t,k)=t^{\alpha(q)}\exp(\lambda_{\beta(q)}(k)t),\quad \alpha(q)=q-m_{j-1}(k)-1,\quad \beta(q)=j,\quad q=1,\ldots,2n, \tag{14}$$

де індекс $j=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k)<q\le m_j(k)$.

Основними результатами даної роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ нерівність* (12) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при*

$$\omega>p(\sigma-1)+\gamma(\sigma+n),\quad \delta\ge\Lambda T,\quad \gamma=\max_{0\le j\le 2n-1}\{N_j/(2n-j)\},$$

де $\sigma=C_{2n}^{n}\left(1+n(\nu-1)\right)$, $\nu=\max_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{1\le j\le m(k)} n_j(k)$,

$$\Lambda=-\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}|k|^{-\gamma}\min\left\{\mathrm{Re}\,\left(\lambda_{\beta(i_1)}(k)+\ldots+\lambda_{\beta(i_n)}(k)\right):(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)\right\}.$$

Зауважимо, що точна нижня грань у формулі для Λ є скінченним числом [12, розд.5,§7].

Теорема 2. *Якщо для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ корені рівняння* (13) *є дійсними, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ нерівність* (12) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\omega>p(\sigma-1)+\gamma(n+1)$, $\delta\ge\Lambda T$, $\gamma=\max_{0\le j\le 2n-1}\{N_j/(2n-j)\}$.*

Діофантові властивості характеристичних визначників крайових задач з умовами вигляду (8) для рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку, досліджувались у роботах [2, 3, 5, 6, 7, 8, 13]. Для таких рівнянь характеристичний визначник допускає факторизацію, кожен множник якої оцінюється знизу на підставі леми 2.4 із [8, розділ 1]. Інший підхід до аналізу оцінок знизу такого факторизованого визначника описано в §4 даної роботи.

Для рівняння (7), яке містить похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків, характеристичний визначник (9), взагалі кажучи, не допускає факторизації, що зумовлює значні труднощі при встановленні оцінки (12). Цим пояснюється відсутність (впродовж тривалого часу) робіт, присвячених дослідженню оцінки (12) для загального рівняння (7). Вперше існуючу прогалину заповнили роботи [11], [15], в яких встановлено, що для довільного рівняння вигляду (7) нерівність (12) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T\in(0,T_0]$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\omega=0$, $\delta>n\Lambda_0T_0$, $\gamma=\max_{0\le j\le 2n-1}\{N_j/(2n-j)\}$, де $\Lambda_0=-\min\left\{0,\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\min_{1\le j\le m(k)}(1+|k|^{\gamma})^{-1}\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\right\}$.

Зауважимо, що теореми 1, 2 даної роботи є посиленням результатів, отриманих у [11], [15], і є точними стосовно нижньої межі для показника δ в сенсі наступного твердження.

Теорема 3. *Для довільного $\varepsilon>0$ існують рівняння вигляду* (7) *і множина $E_\varepsilon\subset\mathbb{R}$ додатної лебегової міри такі, що для всіх $T\in E_\varepsilon$ нерівність* (12) *не може виконуватися для нескінченної кількості векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при жодному дійсному значенні ω, якщо $\delta=\Lambda T-\varepsilon$.*

§2. Допоміжні твердження

Для доведення теорем 1, 2 нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 1. [1, 9] *Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f\in C^n[a,b]$ і для всіх $t\in[a,b]$ виконується нерівність $|f^{(n)}(t)|>\delta$, $\delta>0$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$*

$$\mathrm{meas}\{t\in[a,b]:|f(t)|\le\varepsilon\}\le 2n(n!\varepsilon/\delta)^{1/n}.$$

Нехай $f(t)$ — квазімногочлен вигляду

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t) \exp(\mu_j t), \tag{15}$$

де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $\mu_j \neq \mu_r$, $j \neq r$, $p_j(t)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня $n_j - 1$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, m$.

Лема 2. *Кількість нулів квазімногочлена* (15), *які потрапляють на* $[a, b]$, *не перевищує* $C_1(b - a)(1 + \max\limits_{1 \le j \le m} |\mu_j|)$, *де стала* $C_1 > 0$ *залежить тільки від* n, $n = n_1 + \ldots + n_m$. *Якщо ж всі числа* μ_j *та коефіцієнти многочленів* $p_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$, *є дійсними, то кількість дійсних нулів квазімногочлена* (15) *не перевищує* $(n - 1)$.

Доведення першого твердження леми випливає з теореми Валле Пуссена [8, с. 29]; друге ж твердження — добре відомий факт (див. задачу 75 з [4, с. 58]).

Нижче розглядатимемо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$R\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) \equiv y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Будемо використовувати такі позначення: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корені характеристичного многочлена $R(\lambda)$, $\Lambda_R = \min\limits_{1 \le j \le n} \operatorname{Re} \lambda_j$, $B_R = 1 + \max\limits_{1 \le j \le n} |\lambda_j|$, $\psi_R = \max\limits_{t \in [0,T]} \exp(-\Lambda_R t)$, $G_{R,f}(t) \equiv \max\limits_{1 \le j \le n} \left\{ B_R^{-j} |f^{(j-1)}(t)| \right\}$, де $f \in C^{n-1}[0, T]$.

Лема 3. [10] *Нехай функція* $f(t)$ *є розв'язком рівняння* (16). *Тоді для довільного* $t \in [0, T]$ *виконується нерівність*

$$G_{R,f}(0) \le e^T n(2^n - 1) B_R^n \exp(-\Lambda_R t)\, G_{R,f}(t). \tag{17}$$

Лема 4. *Нехай функція* $f(t)$ *є нетривіальним розв'язком рівняння* (16). *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 = G_{R,f}(0)/(2e^T n(2^n - 1)\psi_R B_R^{n-1})$, *виконується оцінка*

$$\operatorname{meas}\{t \in [0, T] : |f(t)| \le \varepsilon\} \le C_2 B_R \sqrt[n-1]{\varepsilon \psi_R / G_{R,f}(0)}\,, \quad C_2 = C_2(n, T) > 0.$$

Доведення.Згідно з лемою 3, в кожній точці $t \in [0, T]$ виконується нерівність

$$G_{R,f}(t) \ge \frac{G_{R,f}(0)}{e^T n(2^n - 1) B_R^n \psi_R} \equiv \eta. \tag{18}$$

Розглянемо функції

$$y_j(t) = B_R^{-j} \operatorname{Re} f^{(j-1)}(t),\ j = 1, \ldots, n, \quad y_{n+j}(t) = B_R^{-j} \operatorname{Im} f^{(j-1)}(t),\ j = 1, \ldots, n,$$

та функції $z_{jq}^+(t) = y_j(t) + y_q(t)$, $z_{jq}^-(t) = y_j(t) - y_q(t)$, $1 \le j < q \le 2n$. Очевидно, що функції $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ $(1 \le j < q \le 2n)$ є квазімногочленами, модулі показників експонент яких не перевищують B_R. Згідно з лемою 2, кількість нулів на $[0, T]$ кожної з функцій $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) не перевищує $C_3 B_R$, $C_3 = C_3(n, T)$. Нехай $J = \{\, J_r : r = 1, \ldots, M \,\}$ — розбиття відрізка $[0, T]$ на відрізки $J_r = [\xi_{r-1}, \xi_r]$, утворене точками 0, T та всіма нулями всіх нетривіальних функцій $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ $(1 \le j < q \le 2n)$. Очевидно, що для кількості M відрізків розбиття J виконується нерівність $M \le C_4 B_R$, де $C_4 = C_4(n, T)$. Згідно з побудовою розбиття J, кожна з функцій $z_{jq}^+(t)$ $z_{jq}^-(t)$, $1 \le j < q \le 2n$, на кожному з відрізків J_r цього розбиття не може набувати значень різних знаків. Тому на кожному з відрізків J_r для довільних j, q виконується нерівність $|y_j(t)| \ge |y_q(t)|$, $t \in J_r$, або ж нерівність $|y_q(t)| \ge |y_j(t)|$, $t \in J_r$. Звідси отримуємо, що для кожного r, $1 \le r \le M$, знайдеться таке $q(r)$, $1 \le q(r) \le 2n$, що в кожній точці $t \in J_r$ справджується рівність $|y_{q(r)}(t)| = \max\limits_{1 \le j \le 2n} |y_j(t)|$. Оскільки $|f^{(j-1)}(t)| B_R^{-j} \le 2 \max\{|y_j(t)|, |y_{n+j}(t)|\}$, то з нерівності (18) випливає, що на кожному відрізку J_r, $r = 1, \ldots, M$, виконується нерівність

$$|y_{q(r)}(t)| \ge \eta/2, \quad t \in J_r,$$

тобто

$$|\operatorname{Re} f^{(q(r)-1)}(t)| \ge \eta B_R^{q(r)}/2, \quad t \in J_r, \tag{19}$$

якщо $1 \le q(r) \le n$, або

$$|\mathrm{Im}\, f^{(q(r)-n-1)}(t)| \ge \eta B_R^{q(r)-n}/2, \quad t \in J_r, \tag{20}$$

якщо $n+1 \le q(r) \le 2n$. Зауважимо, що

$$\{t \in J_r : |f(t)| \le \varepsilon\} \subset \{t \in J_r : |\mathrm{Re}\, f(t)| \le \varepsilon\}, \ \{t \in J_r : |f(t)| \le \varepsilon\} \subset \{t \in J_r : |\mathrm{Im}\, f(t)| \le \varepsilon\}.$$

Тому з нерівностей (19), (20) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$ множина $\{t \in J_r : |f(t)| \le \varepsilon\}$ є порожньою, якщо $q(r) = 1$ або $q(r) = n+1$. Якщо ж $2 \le q(r) \le n$, то за лемою 1 з нерівностей (19), (20) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$\mathrm{meas}\{t \in J_r : |\mathrm{Re}\, f(t)| \le \varepsilon\} \le C_5 \left(\frac{\varepsilon}{\eta B_R^{q(r)}}\right)^{\frac{1}{q(r)-1}} \le \frac{C_5}{B_R}\left(\frac{\varepsilon}{\eta B_R}\right)^{\frac{1}{n-1}} \le C_6 \left(\frac{\varepsilon \psi_R}{G_{R,f}(0)}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

де $C_6 = C_6(n,T) > 0$. Аналогічно, якщо $n+2 \le q(r) \le 2n$, то за лемою 1 при $\varepsilon < \varepsilon_1$ маємо

$$\mathrm{meas}\{t \in J_r : |\mathrm{Im}\, f(t)| \le \varepsilon\} \le C_7 \left(\frac{\varepsilon \psi_R}{G_{R,f}(0)}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad C_7 = C_7(n,T) > 0.$$

Для завершення доведення леми залишається врахувати, що кількість M проміжків розбиття J не перевищує $C_4 B_R$. Лему доведено.

Лема 5. *Якщо функція $f(t)$ є ненульовим розв'язком рівняння* (16) *і корені многочлена $R(\lambda)$ є дійсними, то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, де ε_1 — стала з леми 4,*

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |f(t)| \le \varepsilon\} \le C_8 \sqrt[n-1]{\varepsilon \psi_R / G_{R,f}(0)}, \quad C_8 = C_8(n,T) > 0.$$

Доведення леми є аналогічним до доведення попередньої леми; при цьому слід врахувати, що згідно з лемою 3 кількість M відрізків розбиття J не перевищує деякої сталої, яка залежить тільки від n.

Лема 6. *Нехай функція $f(t)$ є ненульовим розв'язком рівняння* (16) *і точка $t = 0$ є її нулем порядку s, тобто $f^{(j-1)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, $f^{(s)}(0) \ne 0$. Тоді для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 = |f^{(s)}(0)|/(2e^T n(2^n-1)(2B_R)^{n+s})$, виконується оцінка*

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |f(t)| \le \varepsilon \exp(\Lambda_R t)\} \le C_9 B_R \sqrt[n-1]{\varepsilon |f^{(s)}(0)| B_R^{s+1}}, \quad C_9 = C_9(n,T) > 0.$$

Доведення.Очевидно, що функція $g(t) = f(t)\exp(-\Lambda_R t)$ є розв'язком рівняння

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) g(t) \equiv R\left(\frac{d}{dt} + \Lambda_R\right) g(t) = 0. \tag{21}$$

Коренями многочлена $Q(\mu)$ є числа $\mu_j = \lambda_j - \Lambda_R$, $j = 1, \ldots, n$, де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корені многочлена $R(\lambda)$. Тому

$$B_Q \equiv 1 + \max_{1 \le j \le n} |\lambda_j - \Lambda_R| \le 2B_R, \quad \Lambda_Q \equiv \min_{1 \le j \le n} \mathrm{Re}\,(\lambda_j - \Lambda_R) \ge 0, \quad \psi_Q \equiv \max_{t \in [0,T]} \exp(-\Lambda_Q t) = 1.$$

Застосовуючи до функції $g(t)$, як розв'язку рівняння (21), лему 4, дістанемо, що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_3 = G_{Q,g}(0)/(2e^T n(2^n-1)B_Q^{n-1})$, виконується оцінка

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |g(t)| \le \varepsilon\} \le C_2 B_Q \sqrt[n-1]{\varepsilon / G_{Q,g}(0)}\,.$$

Для завершення доведення леми залишається врахувати нерівності

$$B_Q \le 2B_R, \quad G_{Q,g}(0) \ge B_Q^{-s-1}|g^{(s)}(0)| = B_Q^{-s-1}|f^{(s)}(0)| \ge (2B_R)^{-s-1}|f^{(s)}(0)|$$

і те, що $\{t \in [0,T] : |g(t)| \le \varepsilon\} = \{t \in [0,T] : |f(t)| \le \varepsilon \exp(\Lambda_R t)\}$. Лему доведено.

Лема 7. *Нехай функція $f(t)$ є розв'язком рівняння* (16) *і корені рівняння $R(\lambda) = 0$ є дійсними. Якщо $f^{(j-1)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, $f^{(s)}(0) \ne 0$, то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$, де ε_2 — стала з леми 6, виконується оцінка*

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |f(t)| \le \varepsilon \exp(\Lambda_R t)\} \le C_{10} \sqrt[n-1]{\varepsilon |f^{(s)}(0)| B_R^{s+1}}, \quad C_{10} = C_{10}(n,T) > 0.$$

Доведення базується на лемі 5 і проводиться за схемою доведення леми 6.

Наступні два твердження описують структуру визначника (9) як функції змінної T.

Лема 8. *Для визначника* (9) *виконуються такі рівності:*

$$\frac{\partial^q \Delta(k,T)}{\partial T^q}\Big|_{T=0} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le q < n, \\ n!, & \text{якщо } q = n. \end{cases}$$

Доведення.Функції $f_1(t,k), \ldots, f_{2n}(t,k)$ є аналітичними функціями змінної t. Оскільки $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}$, $j,q = 1,\ldots,2n$, то з формули Тейлора випливають такі розвинення:

$$f_{2q}^{(2j-2)}(t,k) = \begin{cases} \frac{t^{2q-2j+1}}{(2q-2j+1)!} + \beta_{2q,2j-2}(t,k)t^{2n-2j+2}, & \text{якщо} \quad 2q-1 > 2j-2, \\ \beta_{2q,2j-2}(t,k)t^{2n-2j+2}, & \text{якщо} \quad 2q-1 < 2j-2, \end{cases} \tag{22}$$

де $\beta_{2q,2j-2}(t,k)$, $j,q = 1,\ldots,n$, — аналітичні функції в околі точки $t = 0$. На підставі формул (22) дістаємо, що

$$\Delta(k,T) = T^n + \beta(T,k)T^{n+1}, \tag{23}$$

де $\beta(T,k)$ — аналітична функція в околі точки $T = 0$. З рівності (23) та теореми Тейлора негайно випливає твердження леми.

Лема 9. *Визначник* $\Delta(k,T)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *як функція змінної* T, *є розв'язком звичайного диференціального рівняння*

$$S\left(\frac{d}{dT}, k\right) y(k,T) \equiv \prod_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)} \left(\frac{d}{dT} - \Lambda_{\beta(\omega)}(k)\right)^{\gamma(\omega)+1} y(k,T) = 0, \tag{24}$$

де $\gamma(\omega)$ *— степінь многочлена* $P_\omega(k,T)$, $P_\omega(k,T) \equiv \det\left\|\left(d/dT + \lambda_{\beta(i_j)}\right)^{2q-2}\left[T^{\alpha(i_j)}\right]\right\|_{j,q=1}^{n}$, $\Lambda_{\beta(\omega)}(k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{\beta(i_j)}(k)$, *а індекси* $\beta(i_1),\ldots,\beta(i_n)$ *та степені* $\alpha(i_1),\ldots,\alpha(i_n)$ *визначаються формулами* (14).

Доведення.Нехай $\Delta_1(k,T) \equiv \det\|U_j[g_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{2n}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, де $g_1(t,k),\ldots,g_{2n}(t,k)$ визначені формулами (14). Визначники $\Delta(k,T)$ та $\Delta_1(k,T)$ пов'язані рівністю

$$\Delta(k,T) = \Delta_1(k,T)/\det J_k,$$

де J_k — матриця переходу від фундаментальної системи розв'язків $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$ рівняння (10) до фундаментальної системи $g_1(t,k),\ldots,g_{2n}(t,k)$. Розкриваючи визначник $\Delta_1(k,T)$ за правилом Лапласа за мінорами останніх n рядків, дістаємо, що

$$\Delta_1(k,T) = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in C(2n,n)} (-1)^{l_\omega} M_\omega(k) \exp(\Lambda_{\beta(\omega)}(k)T) P_\omega(k,T), \tag{25}$$

де $l_\omega = i_1 + \ldots + i_n + (n+1) + \ldots + 2n$, $M_\omega(k)$ — мінор n-го порядку визначника $\Delta_1(k,T)$, який відповідає першим n рядкам та n стовпцям, номери яких не дорівнюють числам $i_1,\ldots,i_n$. З рівності (25) випливає, що визначник $\Delta_1(k,T)$, а, отже, й визначник $\Delta(k,T)$, є розв'язком диференціального рівняння (24). Лему доведено.

§3. Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. Нехай $E(T_0)$ — множина тих чисел T, які належать до нескінченної кількості множин $E(k,T_0) := \{T \in (0,T_0] : |\Delta(k,T)| < (1+|k|)^{-\omega}\exp(\Lambda T|k|^\gamma)\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми досить перевірити, що $\operatorname{meas} E(T_0) = 0$ для довільного $T_0 > 0$. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі [8, с. 13], для цього досить встановити збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E(k,T_0)$. Нехай $N(k) = \deg_\lambda S(\lambda,k)$, $B_S(k) = 1 + \max\{|\lambda| : S(\lambda,k) = 0\}$, де $S(\lambda,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — характеристичний многочлен рівняння (24). Правильними є такі нерівності:

$$N(k) \le C_{2n}^n\left(1 + n(n^+(k)-1)\right), \quad |B_S(k)| \le C_{11}(1+|k|)^\gamma, \tag{26}$$

де $n^+(k) = \max\limits_{1\le j\le m(k)} n_j(k)$ — максимальна кратність коренів полінома $L(\lambda,k)$. Дійсно, оцінка для $N(k) = \sum\limits_{\omega\in C(2n,n)} (\gamma(\omega)+1)$ випливає з того, що кількість елементів множини $C(2n,n)$ дорівнює C_{2n}^n і того, що для довільного набору $\omega \in C(2n,n)$ степінь $\gamma(\omega)$ многочлена $P_\omega(k,T)$ у формулі (25) не перевищує $n(n^+(k)-1)$. Друга оцінка у формулі (26) випливає з того, що будь-який корінь многочлена $S(\lambda,k)$ є сумою n коренів многочлена $L(\lambda,k)$.

З оцінок (26) на підставі тверджень лем 6, 8, 9 дістаємо, що при $\omega > p(\sigma-1)+\gamma(\sigma+n)$ для міри множини $E(k,T_0)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, виконується нерівність

$$\begin{gathered}\operatorname{meas} E(k,T_0) \le C_{12}B_S(k)\left((1+|k|)^{-\omega}B_S^{n+1}(k)\right)^{1/(N(k)-1)} \le \\ \le C_{13}(1+|k|)^{\gamma+\frac{\gamma(n+1)-\omega}{\sigma-1}} \le C_{13}(1+|k|)^{-p-\varepsilon_4}, \quad k\in\mathbb{Z}^p,\end{gathered} \tag{27}$$

де $\varepsilon_4 = (\omega - p(\sigma-1)-\gamma(\sigma+n))/(\sigma-1) > 0$. З нерівності (27) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E(k,T_0)$. Теорему доведено.

Доведення теореми 2 проводиться за схемою доведення теореми 1; при цьому для оцінки мір множин $E(k,T_0)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, використовуються леми 7, 8, 9.

Доведення теореми 3. Зафіксуємо числа $\varepsilon,\mu,T_0 > 0$. Розглянемо задачу з умовами (8) для рівняння з однією просторовою змінною ($p=1$)

$$\prod_{j=1}^{2n}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mu_j\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega_1,$$

де числа $\mu_1,\dots,\mu_{2n}$ є такими, що виконуються нерівності

$$-\mu-\varkappa \le \operatorname{Re}\mu_1 < \ldots < \operatorname{Re}\mu_{2n} \le -\mu < 0, \quad \varkappa = \varepsilon/(3nT_0).$$

Для даного випадку $\gamma=2$, $\Lambda = -(\operatorname{Re}\mu_1+\ldots+\operatorname{Re}\mu_n)$. Нехай $E_\varepsilon = [T_0-\varepsilon/(3\mu n), T_0]\cap(0,T_0]$. Очевидно, що множина E_ε має додатну лебегову міру. Припустимо, що існує $T\in E_\varepsilon$ таке, що для деякого $\omega\in\mathbb{R}$ нерівність

$$|\Delta(k,T)| \ge (1+|k|)^{-\omega}\exp((\varepsilon-\Lambda T)k^2) \tag{28}$$

виконується для нескінченної кількості цілих чисел k. Легко перевірити, що

$$\forall k\in\mathbb{Z} \quad |\Delta(k,T)| \le C_{14}(1+|k|)^{-2n^2}\exp(-n\mu Tk^2). \tag{29}$$

З оцінок (28), (29) випливає, що для нескінченної кількості $k\in\mathbb{Z}$ виконується нерівність

$$C_{14}\exp\left((\Lambda T - n\mu T)k^2\right) \ge (1+|k|)^{2n^2-\omega}\exp(\varepsilon k^2). \tag{30}$$

Оскільки $\Lambda T - n\mu T \le 2\varepsilon/3$ для всіх $T\in E_\varepsilon$, то ліва частина нерівності (30) оцінюється зверху числом $C_{14}\exp(2\varepsilon k^2/3)$, а, отже, для нескінченної кількості чисел $k\in\mathbb{Z}$ виконується суперечлива нерівність $C_{14}\exp(2\varepsilon k^2/3) \ge (1+|k|)^{2n^2-\omega}\exp(\varepsilon k^2)$. З отриманої суперечності випливає твердження теореми 3.

§4. Частковий випадок задачі (7), (8)

Розглянемо задачу з умовами (8) для рівняння

$$\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{n-1} B_j(D_x)\frac{\partial^{2j}u(t,x)}{\partial t^{2j}} = 0, \tag{31}$$

де $B_j(\xi), j=0,1,\dots,n-1,$ — такі многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів M_j відповідно, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ всі корені $\sigma_1(k),\dots,\sigma_n(k)$ алгебричного рівняння $\lambda^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} B_j(k)\lambda^j = 0$ є простими і відмінними від нуля. Нехай $\mu_j(k) = \sqrt{\sigma_j(k)}$, $j=1,\dots,n$, де вітку кореня вибрано так, що $\sqrt{1}=1$. Визначник (9) для задачі (8), (31) обчислюється за формулою

$$\Delta(k,T) = \prod_{j=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}(\mu_j(k)T)}{\mu_j(k)}. \tag{32}$$

Лема 10. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ кожна з нерівностей*

$$\left|\frac{\operatorname{sh}(\mu_j(k)T)}{\mu_j(k)}\right| \geq (1+|k|)^{-\omega}\exp(|\operatorname{Re}\mu_j(k)|T), \quad j=1,\ldots,n, \tag{33}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при

$$\omega > p+\gamma, \quad \gamma = \max_{0\leq j\leq n-1}\{M_j/2(n-j)\}.$$

Доведення. Нехай $E_j(T_0)$ — множина тих чисел T, які належать до нескінченної кількості множин $E_j(k,T_0)=\{T\in(0,T_0] : |h_j(T,k)|\leq(1+|k|)^{-\omega}\}$, $j=1,\ldots,n$, де $T_0>0$, $h_j(T,k)=\mu_j^{-1}(k)\operatorname{sh}(\mu_j(k)T)\exp(-|\operatorname{Re}\mu_j(k)|T)$. Для доведення леми досить перевірити, що $\operatorname{meas}E_j(T_0)=0$ для всіх $T_0>0$, $j=1,\ldots,n$. За лемою Бореля–Кантеллі [8, с. 13] для цього досить встановити збіжність рядів $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{meas}E_j(k,T_0)$, $j=1,\ldots,n$.

Як і при доведенні леми 4, легко перевірити, що існує розбиття J відрізка $[0,T_0]$, кількість $M(k)$ відрізків якого не перевищує $C_{15}(1+|k|)^{\gamma}$, таке, що на кожному з відрізків J_r, $r=1,\ldots,M(k)$, цього розбиття одна з функцій $\operatorname{Re}{h_j}'(T,k)$, $\operatorname{Im}{h_j}'(T,k)$, $2|\mu_j(k)|\operatorname{Re}h_j(T,k)$, $2|\mu_j(k)|\operatorname{Im}h_j(T,k)$, є максимальною за модулем. Оскільки $|\mu_j(k)|\leq C_{16}(1+|k|)^{\gamma}$, а $h_j'(T,k)+2|\mu_j(k)|h_j(T,k)=1$, то згідно з побудовою розбиття J, в кожній точці відрізка J_r виконується хоча б одна з нерівностей

$$|\operatorname{Re}{h_j}'(T,k)|\geq\frac{1}{4},\ |\operatorname{Im}{h_j}'(T,k)|\geq\frac{1}{4},\ |\operatorname{Re}h_j(T,k)|\geq\frac{C_{17}}{(1+|k|)^{\gamma}},\ |\operatorname{Im}h_j(T,k)|\geq\frac{C_{17}}{(1+|k|)^{\gamma}},$$

де $C_{17}=(8C_{16})^{-1}$. Якщо $\omega>p+\gamma$, а $|k|$ — досить велике, то до множини $E_j(k,T_0)$ можуть входити точки тільки тих відрізків J_r, в кожній точці яких виконується одна з нерівностей

$$|\operatorname{Re}{h_j}'(T,k)|\geq 1/4, \quad |\operatorname{Im}{h_j}'(T,k)|\geq 1/4.$$

Згідно з лемою 2, для таких відрізків виконується нерівність

$$\operatorname{meas}\{T\in J_r : |\operatorname{Re}h_j(T,k)|\leq(1+|k|)^{-\omega}\}\leq C_{18}(1+|k|)^{-\omega},$$

або нерівність

$$\operatorname{meas}\{T\in J_r : |\operatorname{Im}h_j(T,k)|\leq(1+|k|)^{-\omega}\}\leq C_{18}(1+|k|)^{-\omega},$$

а, отже, й оцінка $\operatorname{meas}(E_j(k,T_0)\cap J_r)\leq C_{18}(1+|k|)^{-\omega}$. Враховуючи оцінку зверху для $M(k)$, дістаємо, що $\operatorname{meas}E_j(k,T_0)\leq C_{19}(1+|k|)^{\gamma-\omega}$ для досить великих $|k|$. Оскільки $\omega>p+\gamma$, то для кожного j, $j=1,\ldots,n$, ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{meas}E_j(k,T_0)$ є збіжним. Лему доведено.

Аналогічними міркуваннями можна довести таке твердження.

Лема 11. *Якщо для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ $\mu_j(k)\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ кожна з нерівностей* (33) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\omega>p$.*

З лем 10, 11 випливають такі твердження про оцінку визначника (32).

Наслідок 1. *Для визначника* (32) *нерівність* (12) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо*

$$\omega>n(p+\gamma), \quad \delta=-\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}|k|^{-\gamma}\sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Re}\mu_j(k)|, \quad \gamma=\max_{0\leq j\leq n-1}\{M_j/2(n-j)\}.$$

Наслідок 2. *Якщо для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ $\mu_j(k)\in\mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$, то для визначника* (32) *нерівність* (12) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо*

$$\omega>np, \quad \delta=-\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}}|k|^{-\gamma}\sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Re}\mu_j(k)|, \quad \gamma=\max_{0\leq j\leq n-1}\{M_j/2(n-j)\}.$$

Результати роботи переносяться на випадок задачі з умовами (8) для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

Робота виконана при фінансовій подтримці ДФФД (проект № 10.01/053).

Перелік літератури

[1] *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4.– С. 637–645.

[2] *Білусяк Н.І.* Крайова задача для безтипних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка». Прикладна математика. – 2000. – № 411. – С. 30–35.

[3] *Мосолов П.П.* О задаче Дирихле для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 3. – С. 213–218.

[4] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

[5] *Пташник Б.И.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 6. – С. 841–848.

[6] *Пташник Б.Й.* Про одну крайову задачу для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971, № 6. – С. 522–526.

[7] *Пташник Б.И., Полищук В.Н., Салыга Б.О.* Малые знаменатели в краевых задачах для гиперболических уравнений // В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 108–111.

[8] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[9] *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– **42**, № 4.– С. 90–95.

[10] *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.

[11] *Симотюк М.М.* Задача типу задачі Діріхле для лінійних рівнянь із частинними похідними // Тези доповідей Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С.Підстригача. – Львів: Сплайн, 2004. – С. 144–146.

[12] *Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.

[13] *Фиголь В.В.* Задача типа Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – **17**. – С. 10–14.

[14] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.

[15] *Symotyuk M.M.* The two-point problem for linear partial differential equation // International conference «NPDE–2003», Alushta, September 15-21, 2003. Book of abstracts. – Donetsk: 2003. – P. 208–209.

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

Дрінь М.М., Дрінь Я.М.
Чернівці, Україна

1. Задача Діріхле

Нехай $T > 0,\ |\mu| > 1,\ \gamma \geq 1$ – числові параметри. В шарі $\Pi \equiv \{(t,x)|0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ розглянемо крайову задачу

$$u_t(t,x) + A_\gamma u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi,\ \gamma \geq 1, \tag{1}$$

$$\mu u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де A_γ – псевдодиференціальна операція (ПДО), побудована за однорідним порядку $\gamma \geq 1$ еліптичним символом $A_\gamma(\sigma) \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n$. Звичайною формулою

$$(Au(t,x))(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} a(\sigma) \widetilde{u}(t,\sigma)\, d\sigma, \quad (t,x) \in \Pi,$$

$$\widetilde{u}(t,\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\sigma)} u(t,x)\, dx, \quad (t,\sigma) \in \Pi,$$

ПДО визначена лише на швидко спадених функціях. Ми розглядаємо зображення ПДО у вигляді гіперсингулярного інтеграла (ГСІ) – інтеграла з особливістю, порядок якої вищий розмірністі простору. Таке тлумачення ПДО у вигляді ГСІ вперше запропонував А.Н.Кочубей у праці [1]. Нехай задані комплекснозначні обмежені функції $f \in C(\mathbb{R}^n),\ \Omega \in C(\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$. Вираз вигляду

$$(D^\gamma_\Omega f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(x)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(\frac{h}{|h|}\right) \frac{(\Delta^l_h f)(x)}{|h|^{n+\gamma}}\, dh, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

де $\gamma > 0$, $(\Delta^l_h f)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C^k_l f(x - kh)$, l – натуральне число, $d_{n,l}(\gamma)$ – нормуюча стала, вибір якої залежить від γ при заданих n, l, називається ГСІ порядку α з характеристикою Ω. Наприклад, для нецілих γ інтеграл (3) є абсолютно збіжний, якщо $l \geq \gamma$ і функція f має обмежені похідні до порядку $\mu = [\gamma] + 1$ включно ($[\gamma]$ – ціла частина γ). Абсолютна збіжність інтеграла по кулі $\{|h| < \varepsilon\}$ випливає з формули

$$(\Delta^l_h f)(x) = \sum_{|\varkappa|=\mu} \sum_{\nu=0}^{l} C^\nu_l \frac{(-\nu h)^\varkappa (-1)^\nu}{\varkappa!} \left(D^\varkappa f\right)(x - \Theta_\nu \nu h), \tag{4}$$

де $0 < \Theta_\nu < 1,\ l \geq \mu$ і використані звичайні позначення операцій з мультиіндексами.

Нехай γ – ціле цисло. Якщо γ парне, то ГСІ $D^\gamma_\Omega f$ визначається формулою (3) і є диференціальним оператором порядку γ. Якщо γ непарне, то при $l \geq \gamma$ інтеграл в (3) тотожно дорівнює нулю для довільної функції f. У цьому випадку ГСІ визначений для парної по σ характеристики $\Omega(x,\sigma)$, тобто $\Omega(x,-\sigma) = \Omega(x,\sigma),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \sigma \in S^{n-1}$ при $l > 2[\gamma/2]$ формулою

$$\lim_{\varepsilon\to 0} = -\frac{1}{d_{n,l}(\gamma)} \sum_{k=1}^{\frac{l-1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{h}{|h|}\right) \frac{(\Delta^{l+1}_h f)(x+kh)}{|h|^{n+\gamma}}\, dh - -\frac{1}{2d_{n,l}(\gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{h}{|h|}\right) \frac{(\Delta^{l+1}_h f)(x + \frac{l+1}{2}h)}{|h|^{n+\gamma}}\, dh, \tag{5}$$

де $l + 1 > \gamma,\ D^\gamma_{\Omega,\varepsilon} f$ – зрізаний ГСІ, який одержується заміною в (3) області інтегрування на $\{h \in \mathbb{R}^n ||h| > \varepsilon\}, /\varepsilon > 0$. В [1] виписані формули, які встановлюють зв'язок між ПДО та ГСІ. зауважимо також, що структура ПДО з однорідними символами вивчена в [2].

Якщо $A(\sigma) \equiv |\sigma|^\gamma,\ \sigma \in \mathbb{R}^n,\ \gamma \geq 1$, то задача (1), (2) вивчена в [3].

Нехай виконуються умови: 1) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1,\ \varphi \in C(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$; 2) f: $\Pi \to \mathbb{R}^1,\ f \in C(0,T) \bigcap C^\alpha_x(\mathbb{R}^n) \bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \geq (n-1)/\gamma$, $n > 1$ [2]; 3) Зафіксуємо натуральне $N \geq 2n + 2[\gamma] + 1$;

символ $A(\sigma)$ має N неперервних похідних по σ при $\sigma \neq 0$, причому $\exists C_N > 0$ такі, що $\forall \varkappa,\ |\varkappa| \leq N,\ \forall \varkappa \in \mathbb{R}^n$ $(\sigma \neq 0)$ вірними є нерівності

$$|D_\sigma^\varkappa A(\sigma)| \leq C_N |\sigma|^{\gamma - |\varkappa|}; \tag{6}$$

4) $\exists a_0 > 0$ таке, що $\forall \sigma,\ |\sigma| = 1 : ReA(\sigma) \geq a_0 > 0$. Додаткові умови (необхідні для зображення ПДО у вигляді ГСІ [1]) треба накладати на символи цілого порядку: символом парного порядку вважаємо поліномом по σ, а символ непарного порядку – або поліном, або парна функція аргумента σ.

За допомогою перетворення Фур'є і теореми про перетворення Фур'є згортки [5] розв'язок можна записати у вигляді суми згорток

$$u(t,x) = \int\limits_{R^n} G(t,T,x-\xi,\mu)\varphi(\xi)d\xi + \mu \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G(t-\tau,T,x-\xi,\mu) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_\tau^T d\tau \int\limits_{R^n} G(T+t-\tau,T,x-\xi,\mu) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi, \tag{7}$$

де

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \frac{\exp\{-A(\sigma)t + i(x,\sigma)\}}{\mu - \exp\{-A(\sigma)T\}} d\sigma, \quad (t,x) \in \Pi, |\mu| > 1. \tag{8}$$

Зауважимо, що інтеграл (8) збігається рівномірно і абсолютно в Π при $\mu > 1$ і $\mu < 0$. Якщо $\mu = 1$, то він рівномірно збіжний лише при $n > \gamma \geq 1$. Нехай $|\mu| > 1$, тоді функцію Грина задачі (1), (2) можна записати так:

$$G(t,T,x,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} G_0(t+kT,x), \quad (t,x) \in \Pi,$$

де

$$G_0(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \exp\{-A(\sigma)t + i(x,\sigma)\} d\sigma, \quad (t,x) \in \Pi \tag{9}$$

є фундаментальний розв'язок ПДР (1), для похідних якого вірними є оцінки ([1], стор 919).

$$|D_x^\varkappa G_0(t,x)| \leq C_\varkappa t (t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma-|x|}, \tag{10}$$

$$C_\varkappa > 0, \quad |\varkappa| \leq N - 2n - [\gamma], \quad (t,x) \in \Pi$$

$$|\frac{\partial}{\partial t} G_0(t,x)| \leq C(t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma}, \quad C > 0, \quad (t,x) \in \Pi. \tag{11}$$

Вірною є рівність

$$\int\limits_{R^n} G_0(t-\mu, x-y) dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > \mu, \tag{12}$$

яка випливає із зображення (9) і формули для оберненого перетворення Фур'є. Враховуючи (11) із (12) отримуємо, що

$$\int\limits_{R^n} \frac{\partial G_0}{\partial t}(t-\mu, x-y) dy = 0. \tag{13}$$

Розглянемо об'ємний потенціал з формули (7):

$$W(t,x,\mu) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G_0(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv W_0 + W_1. \tag{14}$$

Припустимо, що вірними є умови 3), 4) і нерівність (6), з $N \geq 2n + 2[\gamma] + 1$, а функція f задовольняє умові $|f(\mu,y)| \leq C(\mu-\tau)^\rho,\ |f(\mu,x) - f(\mu,y)| \leq C|x-y|^\lambda (\mu-\tau)^{-\rho}$, де $0 \leq \rho <$

1, $0 < \lambda < 1$. Інтеграли в (14) абсолютно збігаються, бо вірною є нерівність (10). Крім того із (10) видно, що функція $W(t, x, \tau, \mu)$ (14) має неперервні похідні по x довільного порядку, меншого γ, які можна отримати диференціюванням під знаком інтеграла. Існування похідної по t і формула

$$\frac{\partial}{\partial t}W_0(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial t}G_0(t-\tau, x-\xi)[f(\tau,\xi) - f(\tau,x)d\xi + f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi,$$

доведено в [6], [7]. Формула для дії на об'ємний потенціал W_0 із (14) ГСІ-операції вигляду (3) встановлене в [1], стор 921. Запишемо формулу з допомогою якої визначається дія ГСІ-операції вигляду (3) на об'ємний потенціал W_0 із (14). Нехай α – неціле, $l \geq [\alpha]+1$. Із формулі (4) і оцінки (10) випливає, що при $|h| \leq (t-\eta)^{1/\gamma}$

$$|\Delta_h^l G_0(t-\eta, x-y)| \leq C|h|^{[\alpha]+1}(t-\eta)\sum_{\nu=0}^{l}[(t-\eta)^{1/\gamma} + |x - \Theta_\nu \nu h - y|]^{-n-\gamma-[\alpha]-1}, \tag{15}$$

$0 < \Theta_\nu < 1$. Із нерівністі (10) при $|h| \geq (t-\mu)^{1/\gamma}$

$$|\Delta_h^l G_0(t-\eta, x-y)| \leq C(t-\eta)\sum_{\nu=0}^{l}[(t-\eta)^{1/\gamma} + |x - \nu h - y|]^{-n-\gamma}. \tag{16}$$

Із оцінок (15), (16) і теореми Фубіні отримуємо, що ГСІ $D_\Omega^\alpha W_0$ абсолютно збігається і

$$(D_\Omega^\alpha W_0)(t,x) = \int_0^t d\eta \int_{R^n} G_{0\Omega}(t-\eta, x-y)f(\eta,y)dy, \tag{17}$$

де

$$G_{0\Omega} \equiv D_\Omega^\alpha G_0$$

тобто

$$G_{0\Omega}(z,s) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} \widetilde{\Omega}(\sigma)\exp\{i(z,\sigma) - A(\sigma)s\}d\sigma,$$

а $\widetilde{\Omega}$ є символ даного ГСІ. Користуючись (5) можна довести, що формула (17) є вірною і для випадку цілого непарного $\alpha < \gamma$ і парної характеристики Ω.

Нехай $\alpha = \gamma$, тобто розглянемо ГСІ порядку γ. Припустимо, що $\widetilde{\Omega}(\sigma)$ має при $\sigma \neq 0$ $N \geq 2n + 2[\gamma] + 1$ неперервних похідних і існує стала C_N така, що $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \neq 0$ вірними є нерівності $|D^\varkappa \widetilde{\Omega}(\sigma) le|C_N|\sigma|^{\gamma-|\varkappa|}$, $|\varkappa| \leq N$, причому $\widetilde{\Omega}(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$. Якщо число γ – ціле і символ $\widetilde{\Omega}$ не є поліномом по σ (це можливе лише для непарного γ і парної характеристики), то припускаємо додатково, що у розкладі за сферичними функціями

$$(\widetilde{\Omega}(\sigma))^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}} C_{2\nu,\mu}Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma| = 1,$$

$C_{2\nu,\mu}$, якщо $\gamma = n + 2\nu + 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Випадок, коли $\widetilde{\Omega}$ є поліномом по σ розглянутий в теорії параболічних диференціальних рівнянь [5]. При виконанні сформульованих вище умов ГСІ $D_\Omega^\gamma W_0$ існує в сенсі умовної збізності $(D_\Omega^\gamma W_0)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}(D_{\Omega,\varepsilon}^\gamma W_0)(x)$, якщо ця границя існує для усіх $x \in \mathbb{R}^n$, причому

$$(D_\Omega^\gamma W_0)(t,x) = \int_0^t d\eta \int_{R^n} G_{0\Omega}(t-\eta, x-y)f(\eta,y)[f(y,\eta) - f(x,\eta)]dy. \tag{18}$$

До функції W_1 із (14) ГСІ $D_\Omega^\gamma W_1$ застосовується беспосередньо під знаком інтеграла, а похідна по t вираховується за формулою:

$$\frac{\partial}{\partial t}W_1 = \int_{R^n}\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k-1}G_0(kT, x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} \frac{\partial}{\partial t} G_0(t+kT-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi. \tag{19}$$

Якщо $f \in L_1(\Pi)$, то вірною є нерівність

$$|\frac{\partial}{\partial t} W_1| \le C \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k-1} (kT)^{-n/2} \sup_{0\le t\le T} \int\limits_{R^n} |f(\tau,\xi)| d\xi. \tag{20}$$

Розглянемо задачу (1), (2). Нехай символ задовольняє умови 3), 4). Додаткову вимогу (необхідну для зображення ПДО у вигляді ГСІ) необхідно накладати на символи цілого порядку. Символ парного вважаємо поліномом по ξ, а сімвол непарного порядку – або поліномом, або парною функцією аргумента ξ. Якщо-ж γ є цілим непарним числом, то припускаємо, що що в роскладі функції $(A(\sigma))^{-1}$, $|\sigma| = 1$, за сферичними гармоніками коефіцієнти при $Y_{2\nu,\mu}$ з $\gamma = n+2\nu+2k$, $k = 0, 1, 2, ...$ дорівнюють нулю. Ця умова виконується автоматично, якщо $\gamma < n$ або якщо n парне. Нехай функції φ і f задовольняютб умови (1), (2).

Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо обмежену функцію $u : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, неперервну за сукупністю змінних на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, яка задовольняє рівняння (1) з заміною A на умовно збіжну ГСІ-операцію D^{γ}_{Ω}, характеристика якої визначається за символом $A_\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, або на диференціальні оператори, які розуміємо у класичному сенсі, якщо відповідний символ є поліном по $\sigma \in \mathbb{R}^n$, і таку функцію $u : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яка задовольняє нелокальну умову (2).

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1), (2) *існує і зображається формулою* (7), *якщо* $|\mu| > 1$ *при* $n \ge 1$ *і* $\mu = 1$ *при* $n > \gamma \ge 1$.

Доведення. Використовуючи (12)–(19) безпосередньо переконуємося, що функція $u : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, визначеня формулою (7), задовольняє рівняння (1) і нелокальну умову (2).

2. Задача Неймана

Аналоггічна теорема є вірною для задачі, що містить рівняння (1) і крайову умову Неймана:

$$\mu B(D)u(t,x)|_{t=0} = B(D)u(t,x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad B(D) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \partial x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Задача оптимального керування

Якщо умову (2) записати у вигляді

$$u(t,x)|_{t=0} = u(t,x)|_{t=T} + \mu\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{21}$$

і трактувати параметр μ як керування, то для задачі (1), (21) вірною є така теорема.

Теорема 2. *Існує і едине оптимальне керування* μ_0 *серед допустимих керувань* $\mu \in \mathbb{R}^1$ *задачі* (1), (21) *на якому досягається мінімум функціоналу*

$$I(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(T,x,\mu)|^2 dx \to \min_{\mu}.$$

Зауважимо, що наведені тут результати анонсовані в праці [8].

Перелік літератури

[1] *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **51**, № 5. – С. 909 – 934.

[2] *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений // М: Наука, 1973. 232 с.

[3] *Матвійчук М.І., Дрінь О.Я.* Про розв'язність нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Сучасні проблеми механіки і математики. Матеріали конференції. Львів, 1998. – С. 249.

[4] *Корбут Л.І., Матійчук М.І.* Про зображення розв'язків нелокальних задач для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 947 – 951.

[5] *Эйдельман С.Д.* Параболические системы // М: Наука, 1964. 443 с.

[6] *Дрінь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН.УССР. Сер А. – 1977. № 3.

[7] *Эйдельман С.Д., Дрінь Я.М.* Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений // Матем. исслед. – 1981. Вып. 63. С. 18 – 33.

[8] *М.Дрінь, Я.Дрінь.* Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь. – Міжнародна наукова конференція "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь" (1 – 5 жовтня 2001 р., м.Дрогобич). – Тези доп. – Київ, 2001. – С. 56.

ДО ТЕОРІЇ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Дрінь Я.М.
Чернівці, Україна

На даний час є обширна література, де уява про економіку пода'ється з допомогою математичних моделей як макро- і мікроекономіки так і виробичої та фінансово-кредитної підсистем економіки (див., наприклад, [1] і наведену там літературу). В [2] наведені найвідоміші статичні макромоделі якими за означенням, є виробничі функції (ВФ). У цьому випадку економіка розглядається як цілісна, не структурована одиниця, на вхід якої поступають ресурси, а на виході отримується результат функціонування економіки у формі валового випуску, або валового внутрішнього продукту – як функції. Якщо параметри ВФ не змінюються з часом, то така модель є статична. Описуючи виробничу підсистему економіки за допомогою ВФ ця підсистема розглядається як "чорний ящик", на вхід якого надходять ресурси, а на виході утворюється результат, що є обсягом виробництва різноманітних видів продукції за певний період.

У даній праці зроблена спроба "привідкрити"цей "чорний ящик"і запропонувати нову математичну модель – диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку, розв'язком якого є ВФ. Вводимо поняття простору затрат, векторного поля затрат, виробничої лінії випуску продукції та ВФ як поверхні, повністю складеної з виробничих ліній. Якщо векторне поле задовольняє умови, що мають природний економічний сенс, то із загального розв'язку диференціального рівняння отримуємо відомі ВФ Кобба-Дугласа, ВФ з сталою еластичністю заміщення та інші.

1. Основні позначення і означення

$\mathfrak{R}^1_+ \equiv \{x | x \geq 0\}$ – множина невід'ємних дійсних чисел;

$\mathfrak{R}^n_+ \equiv \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathfrak{R}^1_+,\ i \in \{0, ..., n\}\}$;

x – капітал, або нагромаджена минула праця, що проявляється в основних і оборотних, виробничих і невиробничих фондах. Складові частини x визначаються метою дослідження, а також характером розвитку виробничої та невиробничої сфер упродовж досліджуваного періоду. Щоб не вдаватися в деталі зручно x називати фондами; $x \in \mathfrak{R}^1_+$; y – діюча "жива"праця; $y \in \mathfrak{R}^1_+$; z – результат виробництва, що тлумачиться як обсяги виробництва одного, або різних видів продукції (або валовий внутрішній продукт, або національний дохід). В усіх випадках результат виробництва коротко називаємо випуском; $z \in \mathfrak{R}^1_+$

$C^k(\mathfrak{R}^n_+)$ – простір k разів неперервно диференційованих функцій;

ВФ – виробнича функція, що виражає залежність результатів виробництва від затрат ресурсів;

$z \in C^2(\mathfrak{R}^2_+) : \mathfrak{R}^2_+ \to \mathfrak{R}^1_+$ є ВФ такою, що $\forall (x, y) \in \mathfrak{R}^2_+ : z = F(x, y)$;

$u(x, y, z) = 0$ – неявний запис ВФ;

$\frac{F}{x}$ – середня фондовіддача; $\frac{F}{x} \in \mathfrak{R}^1_+$;

$\frac{F}{y}$ – середня продуктивність праці; $\frac{F}{y} \in \mathfrak{R}^1_+$;

$F_x \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$ – граничний продукт фондів; гранична фондовіддача; гранична ефективність фондів; $\frac{\partial F}{\partial x} \in \mathfrak{R}^1_+$;

$F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}$ – граничний продукт праці; гранична продуктивність праці; гранична ефективність праці; $\frac{\partial F}{\partial y} \in \mathfrak{R}^1_+$.

Рівності

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha_1 \frac{F}{x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \alpha_2 \frac{F}{y} \tag{1}$$

означають, що гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі з коефіцієнтом α_1, а гранична продуктивність праці – з коефіцієнтом α_2.

Означення. Виробнича функція F – називається неокласичною, якщо вона є двічі неперервно диференційованою і задовольняє умови, що мають природне економічне тлумачення:

$$F(0, y) = F(x, 0) = 0; \tag{2}$$

– якщо нема одного з ресурсів, то виробництво є неможливим;

$$\frac{\partial F}{\partial x} > 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} > 0; \tag{3}$$

– із зростанням ресурсів обсяг випуску зростає;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0; \tag{4}$$

– із збільшенням ресурсів швидкість зростання обсягу випуску сповільнюється;

$$F(+\infty, y) = F(x, +\infty) = +\infty; \tag{5}$$

– при необмеженому збільшенні одного з ресурсів обсяг випуску також необмежено зростає.

Приклад. Мультипликативна ВФ задається виразом

$$F = Ax^{\alpha_1} y^{\alpha_2}, \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \tag{6}$$

де A – коефіцієнт нейтрального технічного прогресу; $\alpha_1,\ \alpha_2$ – коефіцієнти еластичності відповідно по праці та фондах задовольняє умови (1)–(3) і (5), а також умову (4) при $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$.

Частковим випадком цієї функції є функція Кобба-Дугласа

$$F = Ax^{\alpha} y^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{7}$$

Зауважимо, що при $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$ граничні віддачі факторів є меншими від середніх і тоді ж мультиплікативні ВФ (6), (7) задовольняють умову (4), яка дуже часто спостерігається в реальній економіці: із зростанням затрат певного ресурсу його гранична віддача спадає.

Із еластичностей випливає, що при $\alpha_1 > \alpha_2$ відбувається інтенсивне зростання виробництва, яке зберігає працю (працебережливе), а при $\alpha_1 < \alpha_2$ – екстенсивне зростання, що зберігає фонди (фондобережливе).

Якщо розглянути темп зростання випуску, то при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ випуск зростає швидше, ніж у середньому зростають фактори, а при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ -повільніше. Отже, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ ВФ (6) описує зростаючу економіку. В [2] досить детально вивчена ВФ (6). Зокрема вияснено економічний зміст її параметрів $A,\ \alpha_1,\ \alpha_2$, доведено, що при $\alpha_i\ i \in \{1, 2\}$, ця функція є неокласична, побудовані ізокванти і ізокліналі цієї функції, знайдені норми заміни ресурсів.

2. Математична модель виробничих процесів для трьох затрат

Нехай $\mathfrak{R}^3_+ \equiv \{(x, y, z) | x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ – простір затрат, які беруть участь у виробичому процесі, $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ – його орти; $\{P, Q, R\} \subset C(\mathfrak{R}^3_+) : \mathfrak{R}^3_+ \to \mathfrak{R}^1_+$ – відомі функції: $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ – неперервне векторне поле затрат.

Кожній точці $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3_+$ відповідає єдиний максимальної величини випуск продукції, виробленої при повному використанні цих затрат. Технологічний зв'язок між цими величинами називається виробничою функцією.

Виробнича лінія випуску продукції, це векторна лінія поля затрат, тобто така гладка лінія із простору $\mathfrak{R}^3_+$, в кожній точці якої існує дотичний вектор $\vec{t} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, колінеарний з вектором поля затрат $\vec{F}$ у цій точці. Тому шукані виробничі лінії визначаються із умови

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \tag{8}$$

де $P,\ Q,\ R$ не дорівнюють нулю тотожно в $\mathfrak{R}^3_+$.

Виробнича функція може бути визначена як поверхня, повністю складена із виробничих ліній. Очевидно, що виробничу функцію (поверхню) можна отримати, розглядаючи множину точок, що лежать на довільно вибраній неперервно залежній від параметра, однопараметричній сім'ї виробничих ліній.

Виробнича поверхня характеризується тим, що вектор напрямлений по нормалі до поверхні в довільній її точці є ортогональним до вектора поля $\vec{F}$:

$$(\vec{N}, \vec{F}) = 0. \tag{9}$$

Якщо $\forall(x,y,z) \in \Re^3_+$ виробнича функція визначається неявним співвідношенням $u(x,y,z)$, то вектор $\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ і рівняння (9) набуде вигляду

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

якщо $\forall(x,y) \in \Re^2_+$ виробнича функція задається явно рівнянням $z = F(x,y)$,то вектор $\vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$ і рівняння (9) набуде вигляду

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = R \quad \forall(x,y,z) \in \Re^3_+. \tag{11}$$

Отже, для знаходження виробничих функцій треба проінтегрувати лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку (10), або квазілінійне рівняння (11) залежно від того чи у неявному вигляді шукаємо ВФ чи у явному. У зв'язку з тим, що виробничі поверхні можуть бути складені із виробничих ліній, то інтегрування рівняння (10) (або (11)) зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь виробничих ліній (8).

Якщо $C_1,\ C_2$ – довільні дійсні сталі і для довільних $(x,y,z) \in \Re^3_+$ співвідношеннями $\Psi_1(x,y,z) = C_1$ і $\Psi_2(x,y,z) = C_2$, визначаються два функціонально незалежні перші інтеграли системи (8), то шуканий вираз для ВФ набуває вигляду

$$\Phi(\Psi_1(x,y,z), \Psi_2(x,y,z)) = 0,$$

Φ – довільна неперервно диференційована функція.

3. Випадок довільного числа затрат

Нехай $\Re^n_+$ – простір затрат, які беруть участь у виробничому процесі, $\vec{e}_i\ i = \{1,...,n\}$ – його орти, $\{P_i,\ i = \{1,...,n\}\} \subset C(\Re^n_+) : \Re^n_+ \to \Re^1_+$ – відомі функції, $\vec{F} = \sum_{i=1}^n P_i\vec{e}_i$ – неперервне векторне поле затрат. Аналогічно вводиться векторна лінія поля затрат як виробнича лінія і виробнича функція, що повністю складається з виробничих ліній. Тоді вектор $\vec{t} = \sum_{i=1}^n dx\vec{e}_i$ і шукані виробничі лінії визначаються з умови

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = ... = \frac{dx_n}{P_n}. \tag{12}$$

Виробнича поверхня $u(x) = 0$, що є ВФ і визначається з умови (9) задовольняє диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^n P_i\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0. \tag{13}$$

Якщо $\Psi_i(x) = C_i,\ i = \{1,...,n\}$ функціонально незалежні перші інтеграли системи (12), то довільна неперервно диференційовна функція від них $f(\Psi_1,...,\Psi_{n-1})$ також є інтегралом системи (12) і, отже, розв'язком рівняння (13):

$$u(x) = f(\Psi_1,...,\Psi_{n-1}). \tag{14}$$

Сім'я розв'язків рівняння (13), залежна від довільної функції f, називається загальним розв'язком рівняння (13) і визначає загальний вигляд шуканих ВФ (14).

4. Приклади

1) Якщо векторне поле затрат $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - \gamma z\vec{k},\ \gamma \geq 0$ то виробнича функція задовольняє рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \gamma z. \tag{15}$$

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (15).

Складемо відповідну рівнянню (15) систему звичайних диференціальних рівнянь, записану в симетричній формі

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\gamma z}.$$

Шукаємо її незалежні перші інтеграли. Інтегруючи рівняння $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ отримаємо: $\ln y = \ln x + \ln C_1,\ C_1 = \frac{y}{x} = \Psi_1$. Інтегруючи рівняння $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{\gamma z}$ отримаємо: $\frac{1}{\gamma}\ln z = \ln x + \ln C_2,\ z^{1/\gamma} = xC_2,\ C_2 = \frac{z^{1/\gamma}}{x} = \Psi_2$

Загальний розв'язок рівняння (4) набуде вигляду:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z^{1/\gamma}}{x}\right) = 0;$$

або (розв'язуючи відносно z)

$$z = x^{\gamma} f(\frac{y}{x});$$

де Φ, f – довільні неперервно диференційовані функції своїх аргументів.

Нехай $\gamma = \alpha + \beta$ і $f(\frac{y}{x}) = (\frac{y}{x})^{\beta}$. Тоді на підставі (16) отримаємо: $z = x^{\alpha+\beta}(\frac{y}{x})^{\beta}$ або $z = x^{\alpha} y \beta$ а це є виробнича функція Кобба-Дугласа, де α і β – еластичність випуску продукції відносно затрат. При $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$ вона є неокласичною.

Нехай $\gamma = h$ і

$$f(\frac{y}{x}) = \left[e_1(\frac{y}{x})^{-\beta}(\frac{y}{x})^{\beta} + e_2(\frac{y}{x})^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}} = x^{-h}\left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}} \tag{16}$$

Тоді на підставі (16) отримаємо:

$$z = x^h x^{-h}\left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}} = \left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}}, \tag{17}$$

а це є виробнича функція з постійною еластичністю заміщення, де: $c_1 \geq 0$ коефіцієнт розподілу, $j \in \{1, 2\}$; $h > 0$ степінь однорідності; $\beta \geq -1$ коефіцієнт заміщення .

Зробимо перевірку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{h}{\beta}\left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}-1} e_1(-\beta)x^{-\beta-1}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{h}{\beta}\left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}-1} e_2(-\beta)y^{-\beta-1}. \tag{19}$$

Помноживши (18) на x, а (19) на y і додавши отримаємо:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{h}{\beta}\left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}-1}(e_1(-\beta)x^{-\beta} + e_2(-\beta)y^{-\beta}) =$$

$$= h\left[e_1 x^{-\beta} + e_2 y^{-\beta}\right]^{-\frac{h}{\beta}-1} = hz, \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = hz.$$

Отже (17) справді є частинним розв'язком рівняння (15). Нехай $\gamma = 1,\ f(\frac{y}{x}) = a_1 + a_2\frac{y}{x}$, тоді $z = a_1 x + a_2 y$ – лінійна виробнича функція. Коефіцієнти $a_i,\ i = \{1, 2\}$ тлумачаться як граничні продукти затрат.

Нехай $\gamma = 1,\ f(\frac{y}{x}) = \min\{\frac{1}{c_1}, \frac{y}{c_2 x}\}$, де $c_j > 0,\ j = \{1, 2\}$ -обсяги затрат виду j необхідні для виробництва однієї продукції, тоді отримуємо ВФ "затративипуску"$z = \min\{\frac{x}{c_1}, \frac{y}{c_2}\}$.

Перевіряючи виконання співвідношень (2)-(5) виясняємо які умови повинна задовольняти функція f із (16), щоб ВФ із (16) була неокласичною ВФ. Вірною є така

Теорема. Нехай ВФ визначається співвідношенням (16): $z = x^{\gamma} f(t)$б де $t = \frac{y}{x},\ 0 < \gamma < 1$.

Якщо виконуються умови:

1) $\lim_{x>0,\ y\to 0} f(t) = \lim_{y>0,\ x\to 0} = 0$;

2) $\forall t \in \Re^1_+ : f(t) > 0,\ f'(t) > 0,\ \gamma f(t) > tf'(t),\ f''(t) < 0$;

3) $\forall \gamma \in (0, 1) :\ y > \frac{2-\gamma}{\gamma}$ (ця умова накладає обмеження на ресурс праці y при заданому γ);

Тоді ВФ (16) є неокласичною.

п Якщо векторне поле затрат $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i - pz\vec{k}$, то виробнича функція $z = z(x)$ задовольняє рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial z}{\partial x_i} = pz, \text{ дер} > 0 \text{ стала.} \tag{20}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = ... = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{z}$$

має такі незалежні перші інтеграли

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1 \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2 \quad ... \quad \frac{dx_{n-1}}{x_n} = C_{n-1} \quad \frac{dz}{x_n^p} = C_n.$$

Отже розв'язок z рівняння (20) визначається неявно виразом

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, ..., \frac{dx_{n-1}}{x_n}, \frac{dz}{x_n^p}\right) = 0,$$

звідки ВФ

$$z = x_n^p f\left(\frac{x_1}{x_n}, ..., \frac{dx_{n-1}}{x_n}\right) = 0,$$

Якщо $n = k$, $f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i}{x_k}$, $p = 1$ то отримаємо ВФ аналізу способів виробничої діяльності, де k – число способів виробничої діяльності, x_i – рівень інтенсивності способу i, α_i – затрати, $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Якщо через $E_{x_i}z$ позначити елатичності від показника z за факторами x_i, $1 \leq i \leq n$, то рівняння (20) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} E_{x_i}z = p.$$

Наведені тут результати анансовані в [3].

Перелік літератури

[1] *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шаланин А.А.* Опыт математического моделирования экономики М.: Энероатомиздат, 1996. – 544 с.

[2] *Калемаев В.А.* Математическая экономика М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

[3] *Дрінь Я.М.* Математичне моделювання деяких виробничих процесів. Стратегія економічного розвітку в умовах глобалізації // Матеріали XI міжнародної науково-практичної конференції у двох томах, Т.2, 2000. – С. 395–403.

УСЛОВНО КОРРЕКТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ

Ануфриева У.А.[1]
Уральский государственный университет,
Екатеринбург, Россия

Для условно корректных систем дифференциальных уравнений указаны пути построения регуляризованных решений в банаховых пространствах.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T], \tag{1}$$

$$u(x;0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$ при каждом $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0;T]$, $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матричный дифференциальный оператор: $A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{A_{j,k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}_{j,k=1}^{m}$, дифференциальные операторы $A_{j,k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ имеют порядок не выше p.

Для исследования применим (обобщенное) преобразование Фурье, приводящее задачу (1),(2), рассматриваемую в некотором пространстве обобщенных функций Φ', к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве $\widetilde{(\Phi')}$

$$\frac{d\widetilde{u}(s;t)}{dt} = A(s)\widetilde{u}(s;t), \qquad s \in \mathbb{C}, \quad t \in [0;T], \tag{3}$$

$$\widetilde{u}(s;0) = \widetilde{f}(s), \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Здесь матричная функция $A(\cdot)$ системы (3) при каждом $s \in \mathbb{C}$ определяет оператор умножения на матрицу $\{A_{j,k}(s)\}_{j,k=1}^{m}$, элементами которой служат многочлены степени не выше p.

Решением задачи (3), (4) служит обобщенная функция $\widetilde{u}(s;t) = e^{tA(s)}\widetilde{f}(s)$, которая определена в тех пространствах $\widetilde{(\Phi')}$, где экспонента $e^{tA(\cdot)}$ определяет мультипликатор (ограниченный оператор умножения). В этом случае обобщенное решение задачи (1), (2) существует в соответствующих пространствах Φ' и имеет вид

$$u(x;t) = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{u}(s;t)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{tA(s)}\widetilde{f}(s)) = (G_t * f)(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T],$$

где $G_t(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(\cdot)}\right)$ — обобщенная матрица-функция Грина. Соответствующее пространство Φ' называется классом обобщенной корректности задачи (1), (2).

В данной работе мы рассматриваем один из классов систем (1), задача Коши для которых не является корректной, а именно условно корректные дифференциальные системы (см. определение 1). Следуя [2], мы указываем классы обобщенной корректности Φ' таких задач и вводим банаховы пространства X, вложенные в Φ' и при этом — максимально широкие.

В выбранных пространствах X мы укажем путь построения регуляризованных решений задачи (1), (2). Основная идея построения состоит в том, чтобы ввести корректирующий множитель $\widetilde{K}(\cdot)$ в обратное преобразование Фурье произведения $e^{tA(\cdot)}\widetilde{f}(\cdot)$ так, чтобы получаемая свертка

$$(G_t * K * f)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(s)}\widetilde{K}(s)\widetilde{f}(s)\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

была определена для любого $f \in X$ и являлась функцией — элементом банахова пространства X. На этом пути в работах [4, 1, 5] были построены регуляризованные полугруппы (C–полугруппы) для систем дифференциальных уравнений, корректных по Петровскому и параболических.

[1] Работа поддержана грантом Уральского государственного университета для молодых ученых.

2. Вводные сведения

Свойства решений задачи (3), (4) определяются поведением ее оператора решения — матричной экспоненты $e^{tA(\cdot)}$, которое описывается следующим условием [2]:

$$e^{t\Lambda(s)} \leq \left\| e^{tA(s)} \right\|_m \leq C(1+|s|)^{p(m-1)} e^{t\Lambda(s)}, \qquad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

где

$$\Lambda(s) = \max_{1\leq j \leq m} \Re \lambda_j(s), \qquad s \in \mathbb{C},$$

$\lambda_j(s)$, $j = 1, \ldots, m$, — собственные значения матрицы $A(s)$. Полагая

$$p_0 = \inf \{ \rho \ : \ |\Lambda(s)| \leq C_\rho (1+|s|)^\rho, \ s \in \mathbb{C} \}$$

(такое число p_0 называется точным степенным порядком роста функции $\Lambda(\cdot)$ и приведенным порядком системы (1)) получаем следующую оценку:

$$\left\| e^{tA(s)} \right\|_m \leq C(1+|s|)^{p(m-1)} e^{b_0 t \cdot |s|^{p_0}}, \qquad b_0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Если пренебречь ролью степенной составляющей этой оценки, то при любом $b_1 > b_0$ можно перейти к неравенству

$$\left\| e^{tA(s)} \right\|_m \leq C_1 e^{b_1 t \cdot |s|^{p_0}}, \qquad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Эта оценка является общей для всех систем (3) в том смысле, что для каждой матричной функции $A(\cdot)$ найдутся такие $p_0 \leq p$, $b_0 \in \mathbb{R}$ и соответственно $b_1 > b_0$, $C_1 = C_1(p_0, b_1)$, при которых выполнено неравенство (6).

Среди всего многообразия систем (1) выделим те, которым посвящена настоящая работа.

Определение 1. Система (1) называется *условно корректной*, если функция $\Lambda(\cdot)$ имеет степенной рост при действительных значениях аргумента, причем показатель степени меньше единицы, т. е. если найдутся такие постоянные $C > 0$, $C_1 > 0$ и $0 < h < 1$, что

$$\Lambda(\sigma) \leq C|\sigma|^h + C_1, \qquad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Из (5) для условно корректных систем на действительной оси получаем оценку

$$\left\| e^{tA(s)} \right\|_m \leq C e^{a_0 t \cdot |\sigma|^h}, \qquad a_0 > 0, \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad 0 < h < 1. \tag{7}$$

Эта оценка при условии (6) может быть продолжена в некоторую окрестность действительной оси [3], а именно, для любого $a_1 > a_0$ найдется область

$$H_\mu = \{ s = \sigma + i\tau : \ |\tau| \leq K(1+|\sigma|)^\mu \}, \qquad 1 - (p_0 - h) \leq \mu \leq 1, \quad K = K(b_1; a_0; a_1),$$

в которой

$$\left\| e^{tA(s)} \right\|_m \leq C e^{a_1 t \cdot |\sigma|^h}, \qquad t \geq 0, \quad a_1 > a_0, \quad s \in H_\mu. \tag{8}$$

Число μ, определяющее область H_μ, может оказаться как положительным, так и отрицательным. В силу ограниченного объема данной статьи, рассмотрим один из случаев: $0 < \mu \leq 1$.

На основании свойств аналитических функций, доказанных в [3], можно показать, что при $\mu \in (0;1]$ матричная экспонента $e^{tA(\cdot)}$ на действительной оси удовлетворяет условию

$$\left\| \frac{d^q}{d\sigma^q} e^{tA(\sigma)} \right\|_m \leq C B_0^q q^{q(1-\frac{\mu}{p_0})} e^{a_2 |\sigma|^h}, \qquad a_2 > a_1, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T],$$

где $B_0 = B_0(a_1, \mu) > 0$. Возьмем $h_1 > h$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_1 = C_1(\varepsilon)$, что

$$\left\| \frac{d^q}{d\sigma^q} e^{tA(\sigma)} \right\|_m \leq C_1 \varepsilon^q q^{q\beta} e^{\varepsilon |\sigma|^{h_1}}, \qquad \beta = 1 - \mu/p_0, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T], \tag{9}$$

Из этого условия следует (см. [3]), что $e^{tA(\cdot)}$ определяет мультипликатор в пространстве $\mathcal{S}_\alpha^\beta$, где $\alpha = 1/h_1$. Следовательно, $e^{tA(\cdot)}$ является мультипликатором в пространстве $\left(\mathcal{S}_\alpha^\beta\right)'$.

В этом случае обратное обобщенное преобразование Фурье экспоненты $e^{tA(\cdot)}$, матрица–функция Грина $G_t(\cdot)$, определяет ограниченный оператор свертки в двойственном пространстве $\left(\mathcal{S}_\beta^\alpha\right)'$. (В данной работе мы ограничиваем себя рассмотрением этих пространств, хотя они и не исчерпывают весь класс корректности задачи (1), (2)).

Пространство $\mathcal{S}_\alpha^\beta$ ($\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$) состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\cdot)$ переменного $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C A^k B^q k^{k\alpha} q^{q\beta}, \qquad k, q \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

с некоторыми константами $A = A(\varphi)$, $B = B(\varphi)$, $C = C(\varphi)$. Пространство $\mathcal{S}_\alpha^\beta$ нетривиально только в следующих трех случаях

$$\begin{array}{lll} 1) & \alpha + \beta \geq 1, & \alpha > 0,\ \beta > 0; \\ 2) & \beta > 1, & \alpha = 0; \\ 3) & \alpha > 1, & \beta = 0. \end{array}$$

В частности, пространство $\mathcal{S}_0^\beta$ — это пространство функций с компактным носителем, удовлетворяющих условию

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq C B^q q^{q\beta}, \qquad q \in \mathbb{N}_0, \quad |x| \leq A,$$

где $A = A(\varphi)$, $B = B(\varphi)$, $C = C(\varphi)$.

При $\alpha > 0$ для функций пространства $\mathcal{S}_\alpha^\beta$ и только для них справедлива оценка

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq C' B^q q^{q\beta} e^{-a|x|^{1/\alpha}}, \qquad q \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

с некоторой константой $C' = C'(\varphi)$ и при $a = a(\varphi) = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}$. Поэтому условие (10) может служить эквивалентным определением пространства S_α^β.

Пространство $\mathcal{S}_\alpha^\beta$ может быть представлено в виде объединения счетно-нормированных пространств $\mathcal{S}_{\alpha,A}^{\beta,B}$, $A > 0$, $B > 0$. Обозначим $\mathcal{S}_{\alpha,A}^{\beta,B}$ множество бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих при любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ условию

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C_{\varepsilon,\delta} (A+\varepsilon)^k (B+\delta)^q k^{k\alpha} q^{q\beta}, \qquad k, q \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

с некоторой константой $C_{\varepsilon,\delta} = C_{\varepsilon,\delta}(\varphi)$. Пространство $\mathcal{S}_{\alpha,A}^{\beta,B}$ с системой норм

$$\|\varphi\|_{p,m} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sup_{q\in\mathbb{N}_0} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x^k \varphi^{(q)}(x)|}{\left(A + \frac{1}{p}\right)^k \left(B + \frac{1}{m}\right)^q k^{k\alpha} q^{q\beta}}, \qquad p, m \in \mathbb{N}.$$

является совершенным счетно–нормированным пространством.

3. Выбор банаховых пространств и построение регуляризованных решений

Введем банаховы функциональные пространства X — насколько возможно широкие, лежащие в пространстве $\left(\mathcal{S}_\beta^\alpha\right)'$ (в классе обобщенной корректности задачи (1), (2)). Для этого рассмотрим в качестве X пространство $L_q^\omega(\mathbb{R})$ функций, абсолютно интегрируемых со степенью q ($1 \leq q < \infty$) с весом $\omega(x) = e^{-\gamma|x|^{p_1}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $p_1 > \frac{1}{\beta} = \frac{p_0}{p_0 - \mu}$, т. е. пространство функций $f(\cdot)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q e^{-\gamma|x|^{p_1}}\, dx < \infty.$$

Введенное пространство с нормой

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^q e^{-\gamma|x|^{p_1}}\, dx \right)^{1/q}$$

является банаховым. Очевидно имеет место вложение $L_q^\omega(\mathbb{R}) \subset \left(\mathcal{S}_\beta^\alpha\right)'$.

Поясним основные идеи построения регуляризованных решений.

Для построения регуляризованного решения в выбранном пространстве X воспользуемся результатом об обратимости классического преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [6]). Умножим $e^{tA(\cdot)}$ на некоторую функцию $\widetilde{K}(\cdot)$ так, чтобы $e^{tA(\cdot)}\widetilde{K}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Из оценки (7) следует, что в качестве такой функции $\widetilde{K}(\cdot)$ можно взять функцию, удовлетворяющую при $|s| \to \infty$ условию

$$|\widetilde{K}(s)| \le Ce^{-b\cdot|s|^{h_1}}, \qquad h_1 > h, \quad b > 0.$$

Тогда найдется функция $Q_t(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, равная обратному преобразованию Фурье функции $e^{tA(\cdot)}\widetilde{K}(\cdot)$:

$$Q_t(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(s)}\widetilde{K}(s)\right)(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad t \ge 0.$$

Для $f(\cdot) \in X$ мы вводим функцию

$$w(x;t) := (Q_t * f)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{tA(s)}\widetilde{K}(s)\widetilde{f}(s)\right)(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T],$$

и показываем, что она является решением следующей задачи Коши для системы (1):

$$\frac{\partial w(x;t)}{\partial t} = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x;t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0;T], \tag{11}$$

$$w(x;0) = (K * f)(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

в пространстве X. Для этого мы раскладываем функцию $f(\cdot) \in X$ в ряд по финитным функциям:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)e(x-n),$$

где $e(\cdot)$ — разложение единицы в пространстве $\mathcal{S}_\beta^\alpha$, определяем функцию $w_n(x-n;t) := (Q_t * f_n)(x-n)$ и показываем, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x-n;t) \tag{13}$$

сходится при каждом $t \in [0;T]$. Это доказательство проводится на основе оценок поведения рассматриваемых функций и свойств аналитических функций.

Следующим этапом является получение равномерной мажоранты частичных сумм ряда (13), причем для выбранной функции $K(\cdot)$ оказывается, что эта мажоранта имеет вид

$$Ce^{\rho\cdot|x|^{p_1}},$$

т. е. ряд (13) оказывается сходящимся в пространстве X. Используя полученные оценки, нетрудно показать, что оператор свертки с ядром $Q_t(\cdot)$ ограничен в X. Отсюда уже получаем, что построенная функция является классическим решением задачи Коши (11), (12) в пространстве X.

Список литературы

[1] *Ануфриева У. А.* Полугруппы, связанные с системами, корректными по Петровскому// "Spectral and evolution problems". Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn Mathematical School–Symposium, 18–29 Sept. 2004, Simferopol. — Simferopol, 2005. — *15*. — C. 103–108.

[2] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 276с.

[3] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 308с.

[4] *Мельникова И.В.* Полугрупповая регуляризация некорректных задач// Докл. РАН. — 2003. — *393*, № 6. — С. 1–5

[5] *Мельникова И.В., Ануфриева У.А.* Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами. — Сер. "Современная математика. Фундаментальные направления". Том *14*, "Дифференциальные уравнения и теория полугрупп". — М.: РУДН, 2005. — С. 3–156

[6] *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504с.

Ануфриева У.А., Уральский государственный университет, Мат.–мех., Екатеринбург, пр. Ленина, 51. 620083 Россия

E-mail: `Uljana.Anufrieva@usu.ru`

О НАИБОЛЬШЕМ ОДНОЗНАЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КОММУТАТИВНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ АЛГЕБРЕ

Бер А.Ф.
Национальный университет Узбекистана,
Ташкент, Узбекистан

Пусть A – коммутативная алгебра с единицей I над полем K нулевой характеристики. Через $\nabla = \nabla(A)$ обозначим множество всех идемпотентов в A. Для любых $e,\ g \in \nabla$ положим $e \leq g$, если $eg = e$. Известно, что отношение $e \leq g$ есть отношение частичного порядка на ∇, относительно которого ∇ является булевой алгеброй. Будем предполагать, что в алгебре A выполняется следующее условие регулярности: для любого $a \in A$ существует такое $e \in \nabla$, что $aA = eA$ (в этом случае говорят, что A - коммутативная регулярная алгебра). Идемпотент $e \in \nabla$ назовем *носителем* для элемента $a \in A$, если $ea = a$ и из $g \in \nabla,\ ga = a$, следует, что $e \leq g$. Нетрудно видеть, что носитель для a всегда существует (его мы будем обозначать через $s(a)$) и $aA = s(a)A$. Обозначим через $i(a)$ - инверсный элемент к a, который однозначно определяется условиями: $ai(a)a = a$ и $i(a)ai(a) = i(a)$.

Пусть μ – конечная строго положительная σ-аддитивная мера на булевой алгебре ∇. Для любых $a, b \in A$ положим $\rho(a, b) = \mu(s(a - b))$. Ясно, что ρ является метрикой на A и топология, порожденная ρ, наделяет A структурой топологического кольца. Мы предполагаем, что (A, ρ) - полное метрическое пространство.

Пусть B – произвольная подалгебра в A. Линейное отображение $\delta : B \to A$ называется *дифференцированием*, если $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для всех $a, b \in B$.

В работе [1] показано, что если дифференцирование δ, определенное на подалгебре B обладает свойством

$(S)\quad s(\delta(a)) \leq s(a)$ для любого $a \in B$,

то его можно продолжить до дифференцирования, определенного на всей алгебре A (если $\nabla \subset B$, то условие (S) выполняется автоматически [1]). Следовательно, существует продолжение и на любое промежуточное расширение B. В данной работе исследуется вопрос: для каких таких расширений B продолжение дифференцирования δ будет единственным. Показано, что среди всех таких расширений существует наибольшее - $E(B)$ и дан способ его построения (Теорема 1.), при этом, наибольшее расширение не зависит от δ.

Этот результат имеет интересное приложение. Пусть $A = S[0, 1]$ - алгебра измеримых функций на отрезке $[0, 1]$, профакторизованная по отношению равенства почти всюду; $D[0, 1]$ - образ при этой факторизации алгебры всех почти всюду дифференцируемых функций на $[0, 1]$. На $D[0, 1]$ рассмотрим естественное дифференцирование δ, порожденное взятием производной. Тогда $E(D[0, 1])$ совпадает с алгеброй всех почти всюду аппроксимативно дифференцируемых функций на $[0, 1]$ (Теорема 2.) (как обычно, равные почти всюду функции отождествляются). И поскольку эта алгебра является собственной подалгеброй в $S[0, 1]$, то на самой алгебре $S[0, 1]$ существует более одного продолжения δ.

Пусть B - подалгебра в A. Рассмотрим следующие подмножества в A: $L(B)$ - подалгебра, порожденная B и ∇; $J(B) = \{ai(b) : a, b \in B\}$; $C(B)$ - замыкание B в метрике ρ; $Z(B)$ - целое замыкание B; $E(B) = (C \circ Z \circ C \circ J \circ L)(B)$.

В [1] показано, что если $\nabla \subset B$, то $J(B)$ и $C(B)$ - подалгебры в A. Кроме того, $Z(B)$ - также подалгебра в A [2]. Поэтому $E(B)$ - подалгебра в A.

Предложение 1. Пусть B - подалгебра в A. Тогда
$L(E(B)) = J(E(B)) = C(E(B)) = Z(E(B)) = E(B)$.

Доказательство. Так как $\nabla \subset E(B)$, то $L(E(B)) = E(B)$. Далее, инверсия i есть изометрия относительно метрики ρ. Поэтому $(C \circ J \circ L)(B)$ замкнуто относительно i. Пусть a - целый элемент относительно $(C \circ J \circ L)(B)$. В [1, Предложение 2.3] показано, что существует такое дизъюнктное разбиение $s(a) = s_1 \vee s_2 \vee \cdots \vee s_n$, что для каждого $j = 1, ..., n$ найдется такой унитарный полином $p_j(x)$ с коэффициентами из $(C \circ J \circ L)(B)$, что $p_j(as_j) = 0$ и $s(p_j(0)) = s_j$. Но тогда $i(a)s_j$ будет корнем унитарного полинома $q_j(x)$, в котором промежуточные коэффициенты (кроме крайних) совпадают с коэффициентами $p_j(x)$, но расположены в обратном порядке и домножены на $i(p_j(0))$, а свободный член $q_j(x)$ равен $i(p_j(0))$. Поэтому все $i(a)s_j$ являются целыми элементами относительно $(C \circ J \circ L)(B)$. Целым будет и их сумма, т.е. - $i(a)$. Поэтому $(Z \circ C \circ J \circ L)(B)$ - замкнуто относительно i. Следовательно, замкнуто относительно i и $E(B) = (C \circ Z \circ C \circ J \circ L)(B)$, т.е. $J(E(B)) = E(B)$.

Так как $C \circ C = C$, то $C(E(B)) = E(B)$.

Пусть a - целый элемент относительно $E(B)$. Тогда a - корень унитарного полинома $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ с коэффициентами из $E(B)$. Каждый элемент a_k есть предел последовательности $a_{kl} \in (Z \circ C \circ J \circ L)(B)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер l и $s \in \nabla, \mu(s) > 1 - \varepsilon$, что $a_k s = a_{kl}$. Тогда $(as)^n + a_{1l}(as)^{n-1} + ... + a_{nl} = 0$. Но, в этом случае, $as \in (Z \circ C \circ J \circ L)(B)$, так как подалгебра $(Z \circ C \circ J \circ L)(B)$ - целозамкнута. Кроме того, очевидно, что $\rho(a, as) < \varepsilon$, следовательно, $a \in E(B)$. Это означает, что $Z(E(B)) = E(B)$. □

Предложение 2. Пусть B - подалгебра в A, $\delta : B \to A$ - дифференцирование, обладающее свойством (S). Тогда существует ровно одно дифференцирование $\delta_E : E(B) \to A$, такое, что $\delta_E(b) = \delta(b)$ для всех $b \in B$.

Доказательство. В [1] показано, что при последовательных расширениях L, J, C любое дифференцирование, обладающее свойством (S), продолжается до дифференцирования единственным образом. Там же показано, что если подалгебра замкнута, регулярна и содержит все идемпотенты, то любое дифференцирование однозначно продолжается с этой подалгебры до дифференцирования на любом простом целом ее расширении. Если бы на $(Z \circ C \circ J \circ L)(B)$ было бы два различных продолжения, то они имели бы различные значения на некотором целом элементе относительно $(C \circ J \circ L)(B)$, что противоречило бы вышесказанному.□

Теорема 1. *Пусть B - подалгебра в A, $\delta : B \to A$ - дифференцирование, обладающее свойством (S). Тогда $E(B)$ - наибольший элемент в решетке всех таких расширений B_1 подалгебры B, для которых существует ровно одно дифференцирование $\delta_1 : B_1 \to A$, обладающее свойством (S) и продолжающее δ.*

Доказательство. Достаточно показать, что если B_1 - одно из расширений B, описанных в формулировке теоремы, то $B_1 \subset E(B)$.

Предположим, что это не так. Тогда найдется элемент $a \in B_1, a \notin E(B)$. Пусть B_2 - подалгебра, порожденная B_1 и $E(B)$. В $E(B)$ существует наибольший идемпотент s, такой, что $sa \in E(B)$ и $s \leq s(a)$. Это следует из замкнутости $E(B)$. Очевидно, что $s < s(a)$, так как $a \notin E(B)$. Поэтому $a(s(a) - s)$ - слабо трансцендентный элемент относительно $E(B)$ [1]. Обозначим через δ_E - дифференцирование на $E(B)$, являющееся единственным продолжением δ. Тогда [1] на B_2 существуют два дифференцирования δ_{21} и δ_{22}, продолжающие δ_E, такие, что $\delta_{21}(a(s(a) - s)) = 0, \delta_{22}(a(s(a) - s)) = s(a) - s$. Поэтому $\delta_{21}(a) = \delta_E(as), \delta_{22}(a) = \delta_E(as) + (s(a) - s)$. Так как сужения δ_{21} и δ_{22} на B_1 остаются дифференцированиями, то мы пришли к противоречию с выбором B_1.□

Далее в качестве коммутативной регулярной алгебры мы будем рассматривать алгебру $S[0, 1]$ и в ней подалгебру $D[0, 1]$.

Предложение 3. $E(D[0, 1])$ совпадает с множеством классов функций вида $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \cdot g_i$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\lambda(\bigcup A_i) = 1$, g_i - почти всюду дифференцируемые функции на $[0, 1]$.

Доказательство. Обозначим через B_1 подалгебру классов функций указанного в формулировке вида. Легко видеть, что $B_1 \subset E(D[0, 1])$ и $\nabla(S[0, 1]) \subset B_1$.

Далее, пусть (*) $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \cdot g_i$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\lambda(\bigcup A_i) = 1$, g_i - почти всюду дифференцируемые функции на $[0, 1]$. Рассмотрим функцию $f_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \cdot g_i^{-1}$. Здесь следует пояснить, что имеется в виду под функцией g_i^{-1}. Это функция имеет множество нулей - такое же как и у g_i и $g_i^{-1}(t) = (g_i(t))^{-1}$ в остальных точках. Покажем, что функция g_i^{-1} почти всюду аппроксимативно дифференцируема. Будем рассматривать только те точки отрезка $[0, 1]$, в которых g_i - дифференцируема. Если t_0 - одна из таких точек и $g_i(t_0) \neq 0$, то t_0 имеет окрестность, не содержащую нулей g_i, и тогда g_i^{-1} дифференцируема в t_0. Если t_0 - точка плотности множества нулей g_i (если, конечно, множество нулей g_i имеет ненулевую меру), то g_i^{-1} - имеет нулевую аппроксимативную производную в точке t_0. Поэтому функция g_i^{-1} - почти всюду аппроксимативно дифференцируема. Тогда из [3, Теорема 3.1.16.] следует, что g_i^{-1} также имеет вид (*). Поэтому и f_1 имеет вид (*).

Ясно, что класс функции f_1 будет инверсией класса функции f. Поэтому $J(B_1) = B_1$.

Пусть $[f]$ - предельная точка B_1. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется такое измеримое подмножество A в $supp(f)$, что мера $supp(f)\setminus A$ меньше ϵ и $[f\chi_A] \in B_1$. Поэтому $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, где все $[f_n] \in B_1$ и $supp(f_n) \cap supp(f_m) = \emptyset$ при $n \neq m$. Легко видеть, что тогда f имеет вид (*) и поэтому $[f] \in B_1$. Следовательно, $C(B_1) = B_1$.

Осталось показать, что $Z(B_1) = B_1$. Пусть класс измеримой функции f принадлежит $Z(B_1)$. Тогда существуют такие попарно непересекающиеся измеримые подмножества $A_i \subset supp(f), i = 1, ..., \infty$, что $\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangle supp(f)) = 0$, $f\chi_{A_i}$ - корень унитарного многочлена $p_i(x) = x^{n_i} + a_1 x^{n_i - 1} + ... + a_{n_i}$, коэффициенты которого имеют вид $a_k = g_k \chi_{A_i}$, где g_k - почти всюду дифференцируемая функция на $[0, 1]$. При этом для любого измеримого подмножества $A' \subset A_i$ функция $f\chi_{A'}$ не будет корнем аналогичного унитарного полинома степени меньше, чем n_i [1, Предложение 2.3].

Если $n_i = 1$, то $f\chi_{A_i} = g\chi_{A_i}$, где g - почти всюду дифференцируемая функция на $[0, 1]$. Далее рассмотрим случай $n_i > 1$.

Легко видеть, что при указанных условиях для почти всех $t \in A_i$ число $f(t)$ будет простым корнем многочлена $p_i(f(t))$. Зафиксируем одно такое t_0.

Пусть $z_0 = (a_1(t_0), ..., a_{n_i}(t_0), f(t_0)) \in \mathbb{C}^{n_i+1}$. Рассмотрим функцию $F(b_1, ..., b_{n_i}, y) = y^{n_i} + b_1 y^{n_i-1} + ... + b_{n_i}$ на $\mathbb{C}^{n_i+1}$. Эта функция дифференцируема в любой точке $\mathbb{C}^{n_i+1}$, $F(z_0) = 0$ и $F'_y = n_i y^{n_i-1} + (n_i - 1) b_1 y^{n_i-1} + ... + b_{n_i-1}$. При этом $F'_y(z_0) \neq 0$, так как $f(t_0)$ - простой корень $p_i(f(t_0))$. Так как F'_y - непрерывная функция, то существует такая окрестность $V(z_0)$ точки z_0, что для любого $z \in V(z_0)$ будет $F'_y(z) \neq 0$. Кроме того, все остальные частные производные $F'_{b_k} = y^{n_i-k}$ - непрерывны. Поэтому выполнены все условия теоремы о неявной функции (см., например, [4, гл.6, §5]). Следовательно, существует такая окрестность W точки $(a_1(t_0), ..., a_{n_i}(t_0))$, что W принадлежит соответствующей проекции $V(z_0)$, и единственная дифференцируемая функция $G : W \to \mathbb{C}$, такие, что $G(a_1(t_0), ..., a_{n_i}(t_0)) = f(t_0)$ и $F(w, G(w)) = 0$, для всех $w \in W$. Найдется такое $\varepsilon > 0$, что $(a_1, ..., a_{n_i})((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subset W$. Существует такая дифференцируемая почти всюду на $[0, 1]$ функция g_{t_0}, которая на $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ совпадает с $G \circ (a_1, ..., a_{n_i})$.

Таким образом на множестве $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap A_i$ есть два корня полинома p_i: $f(t)$ и g_{t_0}. Очевидно, что на подмножестве этого множества, на котором эти функции различны, $f(t)$ будет корнем полинома степени меньше, чем n_i: $((p_i(f) - p_i(g_{t_0}))/(f - g_{t_0}))$. Следовательно, это подмножество имеет меру нуль, т.е. $f(t)$ и g_{t_0} совпадают почти всюду на $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap A_i$.

Множество A_i - измеримо, поэтому совпадает почти всюду со счетным дизъюнктным объединением компактов. Поэтому A_i имеет счетное покрытие интервалами указанного выше вида, на пересечениях с которыми функция f совпадает с некоторой почти всюду дифференцируемой функцией.$\square$

Замечание. $D[0, 1]$ содержит не все идемпотенты $S[0, 1]$.

Пример. Пусть $f = \chi_A$ п.в., где A - замкнутое нигде не плотное множество и $\lambda(A) > 0$. Тогда множество точек, в которых f имеет производную, имеет внешнюю меру не более, чем $1 - \lambda(A)$.

Действительно, в любой окрестности любой точки плотности A найдутся прообразы и 0, и 1. Поэтому в точках плотности A функция f не имеет производную.

Предложение 4. $E(D[0, 1])$ совпадает с подалгеброй всех классов, в каждом из которых есть хотя бы одна почти всюду аппроксимативно дифференцируемая функция.

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i} \cdot g_i$, где $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\lambda(\bigcup A_i) = 1$, g_i - почти всюду дифференцируемые функции на $[0, 1]$. Не ограничивая общности можно считать, что любая точка множества A_i является его точкой плотности и в этих точках существует производная функции

g_i. Очевидно, что в любой точке $t \in A_i$ функция f имеет аппроксимативную производную, равную $g_i'(t)$. Поэтому f - почти всюду аппроксимативно дифференцируемая функция.

Обратное утверждение следует из [3, Теорема 3.1.16.].$\square$

Теперь нам нужно показать, что можно корректно определить естественное дифференцирование на $D[0,1]$, порожденное взятием производной.

Предложение 5. Пусть f и g - почти всюду дифференцируемые функции на $[0,1]$ и $f = g$ п.в.. Тогда множество точек, в которых f и g имеют конечную производную, имеет меру 1 и $f' = g'$ на этом множестве. Кроме того, f' и g' измеримы на этом множестве.

Доказательство. Функция $h(t) = f(t) - g(t)$ имеет почти всюду производную, равную $f'(t) - g'(t)$, при этом $h(t) = 0$ п.в. и h имеет производную почти всюду. Поэтому в тех точках t, где существует $h'(t)$ и где $h(t) = 0$ будет $h'(t) = 0$, так как это множество полной меры и потому всюду плотно в $[0,1]$. $\square$

Пусть $[f] \in D[0,1]$, f имеет конечную производную f' на множестве $A \subset [0,1]$, $\lambda(A) = 1$. Положим $\delta_D([f]) = [g]$, где $g(x) = f'(x)$ для $x \in A$ и $g(x) = 0$ на дополнении A. Из предложения 5. следует, что δ_D - корректно определенное дифференцирование из $D[0,1]$ в $S[0,1]$.

Предложение 6. Дифференцирование δ_D обладает свойством (S).

Доказательство. Пусть f - почти всюду дифференцируемая функция на $[0,1]$ и пусть $N(f)$ - множество нулей f - имеет ненулевую меру. Очевидно, что если t - точка плотности $N(f)$ и в этой точке существует производная f, то $f'(t) = 0$. $\square$

В ([5], гл.IX, §11) показано, что существуют измеримые функции, которые не имеют конечной аппроксимативной производной почти во всех точках из $[0,1]$.

Предложение 7. Пусть f - такая измеримая функция на отрезке $[0,1]$, что не существует конечной аппроксимативной производной почти всюду в $[0,1]$. Тогда $[f] \notin E(D[0,1])$.

Доказательство. Пусть $f = g$ п.в.. Если g имеет аппроксимативную производную в точке t_0, то и f имеет аппроксимативную такую же производную в этой точке, так как пересечение любого измеримого множества с множеством полной меры (там, где $f = g$) имеет такую же меру, что само множество, и точки плотности у этих множеств совпадают. Следовательно, g также не имеет конечной аппроксимативной производной п.в. в $[0,1]$. Это означает, что $[f] \notin E(D[0,1])$. $\square$

Из предложений 3 - 7 вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть $S[0,1]$ - алгебра всех измеримых функций на отрезке $[0,1]$, профакторизованная по отношению равенства почти всюду; $D[0,1]$ - подалгебра в $S[0,1]$, порожденная всеми почти всюду дифференцируемыми функциями на $[0,1]$. Тогда $E(D[0,1])$ совпадает с подалгеброй в $S[0,1]$, порожденной всеми почти всюду аппроксимативно дифференцируемыми функциями на $[0,1]$. Кроме того $E(D[0,1]) \neq S[0,1]$ и на $S[0,1]$ существует более одного дифференцирования, продолжающего δ_D, которое порождено взятием обычной производной на множестве полной меры.*

Список литературы

[1] *A.F. Ber, V.I. Chilin and F.A. Sukochev.* Derivations in are commutative regular algebras. Сдано в печать.

[2] *Н. Бурбаки.* Коммутативная алгебра. Мир, Москва, 1971, 708с.

[3] *Г. Федерер.* Геометрическая теория меры. Наука, Москва, 1987, 760с.

[4] *Л.А. Люстерник, В.И. Соболев.* Краткий курс функционального анализа. Высшая школа. Москва. 1982. 271с.

[5] *С. Сакс.* Теория интеграла. М. 2004, 496с.

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ

С. И. Безродных, В. И. Власов
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
Москва, Россия

В односвязной области сложного вида рассмотрена задача Римана—Гильберта с разрывными коэффициентами и условиями роста. С помощью конформного отображения такая задача сведена к аналогичной задаче в верхней полуплоскости. Конформное отображение построено для двух классов областей сложной формы. Для задачи Римана — Гильберта в верхней полуплоскости с кусочно–гельдеровыми коэффициентами и условиями роста даны теоремы о разрешимости и представления искомой функции с использованием интегралов типа Коши. При помощи полученной формулы типа Якоби для функции Лауричеллы решение краевой задачи с кусочно–постоянными коэффициентами приведено к виду интеграла Кристоффеля — Шварца.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Задача о построении аналитической функции по заданному соотношению между ее вещественной и мнимой частями на границе области, называемая задачей Римана — Гильберта, восходит к классическим работам [1], [2]. Эта задача и ее обобщения явились предметом многочисленных исследований [3]-[10], причем для ряда классов подобных задач было получено полное решение, что нашло отражение в известных монографиях [11]-[15].

Задача Римана — Гильберта и ее обобщения [10]-[13], [16], [17] находят многообразные применения, в том числе в теории уравнений эллиптического и смешанного типа и теории псевдоаналитических функций [11]-[23], в задачах гидро– и аэродинамики [14], [15], [19], [24]-[30], задачах распространения волн и соответствующих обратных задачах [31]-[37], а также в задачах электролиза [38], в теории нейтронных звезд [39], в обратных задачах импедансной томографии [40], [41] и мн. др.

Важные приложения находит задача Римана — Гильберта в физике плазмы, в том числе при моделировании эффекта магнитного пересоединения [42]-[47], лежащего в основе таких явлений, как солнечные вспышки [48], магнитосферные бури [49] и пилообразные срывы в такомаках [50].

1.2. В настоящей работе рассмотрена задача Римана — Гильберта в односвязных областях g сложной формы, причем искомая аналитическая функция f подчинена условиям роста в некоторых точках границы области.

С помощью конформного отображения $\varphi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ области g на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ исходная задача относительно f сводится к аналогичной задаче в $\mathbb{H}$ относительно $\mathcal{F} = f \circ \varphi^{-1}$.

Для задачи Римана — Гильберта в полуплоскости $\mathbb{H}$ с кусочно–гельдеровыми коэффициентами и условиями роста даны теоремы разрешимости, а искомая функция $\mathcal{F}$ представлена с помощью (модифицированных) интегралов типа Коши.

Для случая кусочно–постоянных коэффициентов задачи ее решение $\mathcal{F}$ преобразовано к виду интеграла Кристоффеля — Шварца, т.е. показано, что искомая аналитическая функция $f = \mathcal{F} \circ \varphi$ осуществляет конформное отображение области g на некоторую односвязную многоугольную, вообще говоря неоднолистную, область. Такое преобразование удалось осуществить при помощи установленной в работе формулы типа Якоби для функции $F_D^{(n)}$ Лауричеллы (см. п. 2.1).

1.3. В работе строится конформное отображение $\zeta = \varphi(z)$ для двух классов односвязных областей g, в которых рассматривается задача Римана — Гильберта. К первому классу относятся многоугольные области. Второй класс составляют области g, для каждой из которых можно указать такое ее расширение G через некоторую дугу $\Gamma \subset \partial\, g$, $\Gamma \neq \partial\, g$, что отображение $\Phi : G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ может быть эффективно построено.

Для первого класса, т.е. для многоугольных областей (как известно, отображаемых с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца), предложено два приема, облегчающих решение основной проблемы для этого интеграла — проблемы нахождения прообразов $\{\zeta_k\}$ вершин исходного многоугольника g. Первый из этих приемов дает способ аналитического продолжения и эффективного вычисления функции Лауричеллы $F_D^{(n)}$, фигурирующей в системе нелинейных уравнений для прообразов $\{\zeta_k\}$. Второй прием позволяет находить хорошее начальное приближение для искомых $\{\zeta_k\}$, что обеспечивает эффективность метода Ньютона, обычно используемого для решения указанной системы нелинейных уравнений.

Для второго класса областей предложен аналитико–численный метод построения конформного отображения $\varphi : g \overset{\text{conf}}{\longrightarrow} \mathbb{H}$ в виде предела последовательности $\{\varphi_N\}_N$, где

$$\varphi_N(z) = T \circ \Big[\Phi(z)\, e^{\sigma_N(z)} \Big];$$

здесь T — квадрат дробно–линейной функции, а $\sigma_N(z)$ — линейная комбинация степеней отображения $\Phi : G \overset{\text{conf}}{\longrightarrow} \mathbb{H}$. Такая последовательность сходится в g и допускает неограниченное дифференцирование внутри g и на аналитических кусках дуги $\gamma := \partial g \setminus \Gamma$.

1.4. Разд. 2 посвящен построению конформного отображения областей g первого класса (многоугольников) и решению соответствующей проблемы параметров для интеграла Кристоффеля — Шварца. В разд. 3 изложен метод построения конформного отображения для второго класса областей g. Разд. 4 посвящен задаче Римана — Гильберта в полуплоскости $\mathbb{H}$ с кусочно–гельдеровыми коэффициентами и условиями роста. В разд. 5 дана формула типа Якоби для функции Лауричеллы $F_D^{(n)}$; с ее помощью решение задачи Римана — Гильберта с кусочно–постоянными коэффициентами преобразовано к виду интеграла Кристоффеля — Шварца.

2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

2.1. Прежде всего приведем определение функции Лауричеллы [51], играющей важную роль в дальнейшем. Эта функция, обозначаемая $F_D^{(n)}(a; b_1, \ldots, b_n; c; x_1, \ldots, x_n)$ или, более коротко, $F_D^{(n)}(a; \vec{b}, c; \vec{x})$, определяется при помощи интегрального представления

$$F_D^{(n)}(a; \vec{b}; c; \vec{x}) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \prod_{l=1}^{n} (1 - t\,x_l)^{-b_l}\, dt, \tag{1}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма–функция; кроме того, в (1) использованы обозначения

$$\vec{b} := (b_1, b_2, \ldots, b_n), \qquad \vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Функция $F_D^{(n)}(a; \vec{b}; c; \vec{x})$ является обобщением гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; x)$,

$$F(a, b; c; x) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1 - t\,x)^{-b}\, dt, \tag{2}$$

на случай n комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Функция $F_D^{(n)}(a; \vec{b}; c; \vec{x})$ при $\vec{x} \in \{|x_l| < 1, l = \overline{1, n}\}$ представима в виде следующего ряда

$$F_D^{(n)}(a; \vec{b}; c; \vec{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|}\,(b_1)_{k_1} \ldots (b_n)_{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|}\, k_1! \ldots k_n!}\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}, \tag{3}$$

где $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, для которого величина $|\mathbf{k}|$ определяется по формуле $|\mathbf{k}| := \sum_{l=1}^{n} k_l$. Этот ряд является обобщением гипергеометрического ряда, справедливого для функции $F(a, b; c; x)$ при $|x| < 1$:

$$F(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\, k!}\, x^k;$$

в этой формуле так же, как и в (3), выражение $(a)_k$ обозначает символ Похгаммера [52]: $(a)_k := a\,(a+1)\ldots(a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$.

2.2. На комплексной плоскости z рассмотрим N–угольную область g с вершинами z_k, внутренние углы в которых равны $\pi\alpha_k$, $k = \overline{1, N}$. Для простоты предполагаем, что область g не содержит внутри себя точки $z=\infty$, и все ее вершины z_k конечны за исключением, быть может, z_N.

Пусть функция $\zeta=\varphi(z)$ осуществляет конформное отображение области g на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ с условиями

$$\varphi(z_1)=0, \qquad \varphi(z_{N-1})=1, \qquad \varphi(z_N)=\infty. \tag{4}$$

Тогда обратное отображение $z=\varphi^{-1}(\zeta)$ представляется в виде интеграла Кристоффеля — Шварца [53]

$$\varphi^{-1}(\zeta)=\mathcal{K}\int\limits_0^\zeta t^{\alpha_1-1}\,(t-1)^{\alpha_{N-1}-1}\prod_{k=2}^{N-2}(t-\zeta_k)^{\alpha_k-1}\,dt\,+\,z_1, \tag{5}$$

где $\zeta_k=\varphi(z_k)$ — неизвестные прообразы вершин z_k ($k=\overline{2,\,N-2}$), лежащие в интервале $(0,\,1)$. Отметим, что всего имеется $(N-3)$ неизвестных прообраза.

Обозначим через I_k модуль интеграла (5), взятого между соседними прообразами ζ_k и ζ_{k+1}

$$I_k\,(\zeta_2,\ldots,\zeta_{N-2})=\left|\,\int\limits_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} t^{\,\alpha_1-1}\,(t-1)^{\,\alpha_{N-1}-1}\prod_{l=2}^{N-2}(t-\zeta_l)^{\alpha_l-1}\,dt\right|. \tag{6}$$

Приводя при помощи линейной замены переменных $t=\zeta_k+(\zeta_{k+1}-\zeta_k)\,\tau$ отрезок интегрирования $t\in[\zeta_k,\,\zeta_{k+1}]$ к единичному $\tau\in[0,1]$ и используя интегральное представление (1), выражаем интегралы (6) через функцию Лауричеллы:

$$\begin{aligned}I_k\,(\zeta_2,\ldots,\zeta_{N-2})\,=F_D^{(N-3)}\left(\alpha_k;\,\vec{1}-\vec{\alpha}_k;\,\alpha_k\,+\,\alpha_{k+1};\,\vec{a}_k\right)\frac{\Gamma(\alpha_k)\,\Gamma(\alpha_{k+1})}{\Gamma(\alpha_k+\alpha_{k+1})}\times\\ \times(\zeta_{k+1}-\zeta_k)^{\alpha_k}\prod_{l=1}^{k-1}(\zeta_k-\zeta_l)^{\alpha_l-1}\prod_{l=k+1}^{N-1}(\zeta_l-\zeta_k)^{\alpha_l-1}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь через $\vec{\alpha}_k$ и $\vec{a}_k$ обозначены

$$\vec{\alpha}_k:=\{\alpha_1,\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_{N-1}\};\qquad \vec{a}_k:=\{a_1^k,\ldots a_{k-1}^k,\,a_{k+2}^k,\ldots,a_{N-1}^k\},\quad a_l^k:=\frac{\zeta_{k+1}-\zeta_k}{\zeta_l-\zeta_k},$$

а через $\vec{1}$ — вектор из единиц $\{1,\,\ldots,1\}$ длины $(N-3)$.

2.3. Исходя из вида (5) отображения $\varphi^{-1}(\zeta)$ и используя условие

$$\left|\varphi^{-1}(\zeta_{k+1})-\varphi^{-1}(\zeta_k)\right|=L_k\,,$$

где $L_k:=|z_{k+1}-z_k|$ — длина k–ой стороны многоугольника g, приходим к следующей системе из $(N-3)$–х уравнений для $(N-3)$–х неизвестных прообразов $\zeta_2,\ldots,\zeta_{N-2}$:

$$I_k/I_{N-1}=L_k/L_{N-1}, \qquad k=\overline{1,N-3}. \tag{8}$$

Способ получения подобных систем хорошо известен [54]-[56]. После решения системы (8) предынтегральный множитель $\mathcal{K}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{K}=(\,L_1/I_1\,)\;e^{i\,\theta}\,, \qquad \theta:=\pi\,(\alpha_1\,+\,\alpha_N)\,+\,\arg(z_2-z_1)\,. \tag{9}$$

Решение этой системы нелинейных уравнений находится с помощью известного способа [54], [57]-[59], заключающегося в сочетании процедуры Ньютона [55] с методом продолжения по параметру [60]. Для эффективной реализации такого способа необходимо иметь хорошее начальное приближение для $\zeta_2,\ldots\zeta_{N-2}$ и высокоточный метод вычисления интегралов I_k.

Метод вычисления этих интегралов дан в п. 2.4, а подход к построению начального приближения для ζ_k описан в п. 2.5.

2.4. Как видно из выражения (7), нахождение интегралов $I_k\,(\zeta_2,\ldots\zeta_{N-2})$ сводится по существу к вычислению функции Лауричеллы $F_D^{(N-3)}\,(a;\vec{b};\,c;\,x_1,\ldots,x_{N-3})$.

Изложим метод вычисления этой функции для случая, когда все (комплексные) переменные x_l лежат в единичном круге, кроме одного (пусть им будет x_1, что не ограничивает общности), т.е.

$$|x_l|<1, \qquad l=\overline{2,n}. \tag{10}$$

Отметим, что этот случай нередко встречается при построении отображения многоугольников.

Разлагая под знаком интеграла (1) все биномы $(1-tx_l)^{-b_l}$, кроме соответствующего $l=1$, по степеням (tx_l), меняя порядок суммирования и интегрирования и используя представление Эйлера (2), получаем разложение функции Лауричеллы в ряд по гипергеометрическим функциям Гаусса

$$F_D^{(n)}\,(a;\vec{b};\,c;\,\vec{x}\,)\;=\;\sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty}\frac{(a)_{|\mathbf{k}|}\,(b_2)_{k_2}\ldots(b_n)_{k_n}}{(c)_{|\mathbf{k}|}\,k_2!\ldots k_n!}\,x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}\,F(a+|\mathbf{k}|;\,b_1;\,c+|\mathbf{k}|;x_1); \tag{11}$$

здесь $\mathbf{k}=(k_2,\ldots,k_n)$ — мультииндекс; напомним, что $|\mathbf{k}|:=\sum_{l=2}^{n}k_l$. Поскольку для вычисления гипергеометрической функции $F(a+|\mathbf{k}|;\,b_1;\,c+|\mathbf{k}|;x_1)$ при произвольном x_1 хорошо известны эффективные методы (см. [52], [61]), а ряд (11), как нетрудно показать, сходится при принятых условиях (10), то можно говорить, что формула (11) дает аналитическое продолжение функции Лауричеллы по x_1 и представляет эффективный метод вычисления этой функции при условиях (10).

2.5. Метод построения начальных приближений для прообразов, фигурирующих в интеграле Кристоффеля — Шварца (5), изложим на примере пятиугольника g, вершины которого будем по-прежнему обозначать через z_k, а соответствующие углы — через $\pi\,\alpha_k,\ k=\overline{1,5}$. Область g расположим так, чтобы вершина z_1 совпадала с началом координат (т.е. $z_1=0$), а вершина z_4 лежала на положительной вещественной полуоси. Предположим также, что $\operatorname{Im} z_2<0$ и $\operatorname{Im} z_3<0$, а продолжения сторон $(z_1,\,z_2)$ и $(z_3,\,z_4)$ в направлении точек z_2 и z_3 пересекаются в конечной точке z_* под углом $\pi\,\alpha_*$ (т.е. угол $(z_1\,z_*\,z_4)$ равен $\pi\,\alpha_*$). В случае, когда g — пятиугольник, условия (4) нормировки отображения $\varphi(z)$ принимают вид

$$\varphi(z_1)=0,\qquad \varphi(z_4)=1,\qquad \varphi(z_5)=\infty, \tag{12}$$

а интеграл Кристоффеля — Шварца (5) выглядит следующим образом:

$$\varphi^{-1}\,(\zeta)=\mathcal{K}\int_0^{\zeta}t^{\alpha_1-1}\,(t-\lambda)^{\alpha_2-1}\,(t-\tau)^{\alpha_3-1}\,(t-1)^{\alpha_4-1}\,dt\,;$$

здесь неизвестные параметры $\lambda:=\varphi(z_2),\ \tau:=\varphi(z_3)$ и множитель $\mathcal{K}$ определяются из системы нелинейных уравнений (8) и соотношения (9), записанных для $N=5$.

Найдем асимптотики величин λ и τ, соответствующие стягиванию отрезка (z_2,z_3) к точке z_*. Для этого применим теорию конформного отображения сингулярно деформируемых областей [62]; в дальнейшем для краткости будем называть ее *теорией деформирования*. В соответствии с этой теорией, отображение φ_L исходной области g на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ может быть представлено в виде ряда по степеням отображения φ_0 некоторой (недеформированной) области g_0, имеющей с g общую часть границы. Такой ряд сходится в подобласти g и на части границы $\partial\,g$; с его помощью удается исследовать зависимость прообразов λ и τ от геометрических параметров многоугольника g.

В качестве недеформированной области g_0 выберем четырехугольник с вершинами $z_1,\ z_*,\ z_4$ и z_5 и углами $\pi\alpha_1,\ \pi\alpha_*,\ \pi\alpha_4$ и $\pi\alpha_5$. В дальнейшем будем предполагать, что величина $\varkappa:=1-\alpha_*-\alpha_4$ отлична от нуля. (Случай $\varkappa=0$ получается соответствующим предельным переходом). Отображение $\varphi_0\,(z):\ g_0\xrightarrow{\text{conf}}\mathbb{H}$ подчиним условиям

$$\varphi_0\,(z_1)\;=\;-1,\qquad \varphi_0\,(z_*)\;=\;0,\qquad \varphi_0\,(z_5)\;=\;\infty.$$

Образ вершины z_4 при этом отображении, обозначаемый через d_0, может быть найден аналитически в виде следующего разложения

$$d_0=\sigma\Bigl(\delta+\sum_{k=2}^{\infty}\Lambda_k\,\delta^k\Bigr). \tag{13}$$

Фигурирующие здесь величины δ и σ определяются по формулам

$$\delta:=\left(\frac{|z_*-z_1|\,\sin\pi\,\varkappa}{|z_*-z_4|\,\sin\pi\,\alpha_4}-1\right)^{1/\varkappa},\qquad \sigma:=\left[\frac{\Gamma(1+\varkappa)\,\Gamma(\alpha_1-\varkappa)\,\Gamma(\alpha_*)}{\Gamma(1-\varkappa)\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_4)}\right]^{1/\varkappa},$$

а коэффициенты Λ_k зависят лишь от углов четырехугольника g_0 и для их вычисления могут быть получены рекуррентные формулы, причем ряд (13) сходится в круге $\{|\delta|<1\}$.

Вид разложения (13) вытекает из теории конформного отображения круговых треугольников [52], [54] и теории деформирования [62]. Более подробно об аналитическом отыскании неизвестных параметров при отображении прямолиненого четырехугольника см. [54] и [63].

Заметим еще, что из теории деформирования вытекает следующее разложение величины $b_0 := -\varphi_0(z_2)$ по степеням параметра $\varepsilon := |z_2 - z_*|$:

$$b_0 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \, \varepsilon^{k/\alpha_*} \,. \tag{14}$$

Рассмотрим вспомогательное отображение $\varphi_L(z) : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ исходной области, подчиненное условиям

$$\varphi_L(z_2) = -\varphi_L(z_3); \qquad \varphi_L(z_5) = \infty, \qquad \varphi_L(z) \sim \varphi_0(z), \quad z \to z_5, \tag{15}$$

и введем обозначения для образов вершин z_1, z_2 и z_3 при таком отображении:

$$a := -\varphi_L(z_1), \qquad b := -\varphi_L(z_2), \qquad d := \varphi_L(z_4)\,. \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что функции $\varphi(z)$ и $\varphi_L(z)$, удовлетворяющие условиям (12) и (15), связаны линейным соотношением:

$$\varphi(z) = \frac{\varphi_L(z) + a}{d + a},$$

из которого находим выражения величин λ и τ через a, b и d:

$$\lambda = \frac{a - b}{a + d}\,, \qquad \tau = \frac{a + b}{a + d}\,. \tag{17}$$

Из теории деформирования вытекают следующие разложения

$$\varphi_L(z) = \varphi_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \, L^{k+1} \, [\varphi_0(z)]^{-k} \,, \quad \varphi_0(z) = \varphi_L(z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, l^{k+1} \, [\varphi_L(z)]^{-k} \,, \tag{18}$$

где величины L и l определяются по формулам

$$L = \max_{z \in (z_2,\, z_3)} |\varphi_0(z)|, \qquad l = \max_{z \in (z_2,\, z_3)} |\varphi_L(z)|,$$

а коэффициенты B_k и b_k вещественны и удовлетворяют оценкам

$$|B_0| \le 2, \quad |B_k| \le 1/\sqrt{k}, \qquad |b_0| \le 2, \quad |b_k| \le 1/\sqrt{k}, \qquad k \ge 1\,.$$

Первое разложение (18) сходится на множестве $\varphi_0^{-1}\,(\mathbb{K}(L))$, а второе — на множестве $\varphi_L^{-1}\,(\mathbb{K}(l))$, где $\mathbb{K}(r) := \{z :\, 0 \le \operatorname{Im} z,\, r \le |z|\}$. Подставляя $z = z_1$ и $z = z_4$ в первое равенство (18) и используя (13), а также подставляя $z = z_2$ во второе равенство (18) и используя (14), с учетом (16), (17) находим следующие асимптотики:

$$1 - \lambda = O\,(\delta)\,, \quad 1 - \tau = O\,(\delta)\,, \quad \delta \to 0; \quad \tau - \lambda = O\left[\varepsilon^{1/\alpha_*}\right], \quad \varepsilon \to 0. \tag{19}$$

Коэффициенты в этих асимптотиках могут быть получены из анализа системы нелинейных уравнений относительно λ и τ, после чего (19) можно применять в качестве начальных приближений для итерационного процесса Ньютона.

3. АНАЛИТИКО–ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОГО ВИДА

3.1. Пусть g — конечная односвязная область со спрямляемой границей $\partial\, g$, которая состоит из двух звеньев γ и Γ (т.е. $\partial\, g = \gamma \cup \Gamma$), соединяющихся между собой в точках A_1 и A_2, причем положительное направление обхода дуги γ (когда g остается слева) соответствует движению от точки A_1 к точке A_2. Предполагаем, что внутренние углы в этих точках больше нуля и меньше π, дуга γ в некоторых их окрестностях является дугой Ляпунова, а Γ представляет собой жорданову кусочно–гладкую кривую, гладкие звенья которой соединяются под ненулевыми (внутренними) углами. Будем говорить, следуя [62], что такие области g удовлетворяют условию (γ, Γ) и писать $g \in (\gamma, \Gamma)$.

Расширением области $g \in (\gamma, \Gamma)$ через дугу Γ будем называть (также следуя [62]) область G, для которой выполняются следующие включения: $g \subset G$, $\gamma \subset \partial G$, $\operatorname{int}\Gamma \subset G$, а контур ∂G в некоторых окрестностях точек A_1, A_2 представляет собой дугу Ляпунова.

3.2. Пусть $g \in (\gamma, \Gamma)$ и G — расширение области g через дугу Γ. Конформное отображение $\Phi : G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ области G на верхнюю полуплоскость подчиним следующим условиям:

$$\Phi(N) = 0, \qquad \Phi(M) = \infty, \tag{20}$$

где $N \in \operatorname{int}\gamma$, $M \in \partial G \setminus \gamma$. Введем также конформное отображение $\mu : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{U}^+$ области g на полукруг $\mathbb{U}^+ := \mathbb{H} \cap \{|z| < 1\}$, удовлетворяющее условиям

$$\mu(A_1) = -1, \qquad \mu(N) = 0, \qquad \mu(A_2) = 1. \tag{21}$$

На дуге Γ введем функцию

$$h\,(z) := -\ln|\Phi\,(z)|,$$

определим систему функций $\{\Omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле

$$\Omega_k\,(z) := \operatorname{Re}\big[\Phi(z)\big]^k$$

и, обозначив через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2\,(\Gamma)$, рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{l=0}^{N} (\Omega_k, \Omega_l)\, a_l^N = (\Omega_k, h), \qquad k = 0, \ldots, N \tag{22}$$

относительно величин $(a_0^N, \ldots, a_N^N)$. Верхний индекс N у величин a_l^N подчеркивает их зависимость от размера системы уравнений (22). Справедлива следующая

Теорема 1. *Последовательность функций $\{\mu_N\,(z)\}_N$, определяемых по формуле*

$$\mu_N\,(z) := \Phi\,(z) \exp\Big[\sum_{k=0}^{N} a_k^N\, \Phi^k\,(z)\Big],$$

где $(a_0^N, \ldots, a_N^N)$ — решение системы (22), равномерно сходится к функции $\mu(z)$ на множестве $g \cup \operatorname{int}\gamma$, причем эту последовательность можно дифференцировать произвольное число раз на объединении g и аналитических учатков γ.

Доказательство строится на основе подхода [62], использованного при обосновании метода мультиполей, и на основе сведе́ния построения конформного отображения к решению задачи Дирихле, см. [56].

Из теоремы 1 вытекает, что последовательность $\varphi_N\,(z) := T \circ \mu_N\,(z)$, где

$$T(w) := (1 + w)^2/(1 - w)^2,$$

сходится на множестве $g \cup \operatorname{int}\gamma$ к функции $\varphi(z)$, конформно отображающей область g на верхнюю полуплоскость, причем причем эта последовательность допускает дифференцирование произвольное число раз на объединении g и аналитических участков γ.

4. ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА С КУСОЧНО–ГЕЛЬДЕРОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

4.1. Задача Римана — Гильберта для функции $f\,(z)$ в произвольной односвязной области g при помощи конформного отображения $\varphi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ сводится к аналогичной задаче в верхней полуплоскости. При этом исходное краевое условие

$$\operatorname{Re}\big[\,\widetilde{h}\,(z)\, f\,(z)\big] = \widetilde{c}\,(z), \qquad z \in \partial\, g$$

на границе g переходит в аналогичное условие для функции $\mathcal{F}(\zeta) = f \circ \varphi^{-1}(\zeta)$ на вещественной оси. Будем рассматривать такой случай, когда коэффициенты $h\,(x) := \widetilde{h} \circ \varphi^{-1}\,(x)$ и $c\,(x) := \widetilde{c} \circ \varphi^{-1}\,(x)$ задачи Римана — Гильберта в верхней полуплоскости кусочно–гельдеровы функции с разрывами первого рода.

4.2. Переходя к рассмотрению указанной задачи, введем на вещественной оси $\mathbb{R} = \partial\,\mathbb{H}$ конечное множество $\mathcal{X}$ точек x_k $(k = \overline{0, N})$, где x_0 — бесконечно удаленная, а остальные x_k — конечные точки, причем $x_{k+1} > x_k$; полагаем также $x_{N+1} = x_0$. Пусть заданные на $\mathbb{R}$ комплексная $h(x)$ и вещественная $c(x)$ кусочно–гельдеровы функции (коэффициенты задачи Римана — Гильберта) имеют разрывы первого рода в точках x_k, $k=\overline{0,N}$.

Определим числа $\alpha_k \in (0,\,1)$ по формуле

$$\alpha_k := \big\{(2\pi)^{-1}\left[\vartheta\,(x_k+0)-\vartheta\,(x_k-0)\right]\big\},$$

где $\vartheta\,(x) := \arg h(x)$, а $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a. Определим также α_0 по формуле

$$\alpha_0 := \frac{1}{2\pi}\,\sum_{k=0}^{N}\Delta_k\,\vartheta + \sum_{k=0}^{N}\alpha_k, \tag{23}$$

где $\Delta_k\,\vartheta := \vartheta\,(x_{k+1}-0)-\vartheta\,(x_k+0)$.

Рассмотрим задачу Римана — Гильберта в верхней полуплоскости для аналитической в $\mathbb{H}$ и непрерывной в $\overline{\mathbb{H}}\setminus\mathcal{X}$ функции $\mathcal{F}(\zeta)$:

$$\operatorname{Re}\big[h(x)\,\mathcal{F}\,(x)\big]=c(x), \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{X}, \tag{24}$$

с условиями роста в точках x_k

$$\mathcal{F}(\zeta)=O\big[(\zeta-x_k)^{2\alpha_k-\varkappa_k}\big], \quad x\to x_k, \quad k=\overline{1,N}, \tag{25}$$

$$\mathcal{F}(\zeta)=O\big(\,\zeta^{2\alpha_0+\varkappa_0}\,\big), \quad \zeta\to\infty, \tag{26}$$

где $\varkappa_0,\,\varkappa_1,\ldots,x_N\in\mathbb{Z}^+$ — заданные неотрицательные целые числа.

Заметим, что при выполнении условий (25), (26) решение $f(z)$ исходной краевой задачи в области g подчиняется соответсвующим условиям роста на границе ∂g.

Решение задачи (24)–(26) будем строить в виде суммы

$$\mathcal{F}(\zeta)=\Psi(\zeta)+\chi(\zeta) \tag{27}$$

общего решения $\Psi(\zeta)$ однородной задачи

$$\operatorname{Re}\big[h(x)\,\Psi\,(x)\big]=0, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{X}, \tag{28}$$

удовлетворяющего условиям (25), (26), и частного решения $\chi(\zeta)$ неоднородной задачи (24)–(26).

Теорема 2. *Решение $\Psi(\zeta)$ однородной задачи (25), (26), (28), аналитическое в $\mathbb{H}$ и непрерывное в $\overline{\mathbb{H}}\setminus\mathcal{X}$, существует и единствено с точностью до произвольных вещественных постоянных $q_m^{(k)}$ и имеет следующий вид, содержащий эти постоянные:*

$$\Psi(\zeta)=\varphi(\zeta)\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{\varkappa_k}\frac{q_m^{(k)}}{(\zeta-x_k)^m}+\sum_{m=0}^{\varkappa_0}q_m^{(0)}\,\zeta^m\right], \tag{29}$$

где

$$\varphi(\zeta)=\exp\left[\frac{\zeta}{\pi}\int_{-\infty}^{x_1}\frac{\theta(t)\,dt}{t\,(t-\zeta)}+\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_N}\frac{\theta(t)\,dt}{t-\zeta}+\frac{\zeta}{\pi}\int_{x_N}^{\infty}\frac{\theta(t)\,dt}{t\,(t-\zeta)}\right]; \tag{30}$$

здесь $\theta(x)=\pi/2-\vartheta(x)$.

Теорема 3. *Частное решение $\chi(\zeta)$ задачи (24)–(26) представимо в виде*

$$\chi(\zeta)=\sum_{k=0}^{N}\chi_k(\zeta); \tag{31}$$

здесь

$$\chi_k\,(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)}{\pi\,i}\,(\zeta-x_k)^{-\delta_k}\,(\zeta-x_{k+1})^{-\delta_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{(t-x_k)^{\delta_k}\,(t-x_{k+1})^{\delta_{k+1}}\,c(t)\,dt}{\varphi(t)\,h(t)\,(t-\zeta)}\,, \tag{32}$$

где

$$\delta_k=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \alpha_k<1/2\,,\\ 1, & \text{если}\quad \alpha_k\geq 1/2;\end{cases} \qquad \delta_0=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \alpha_0>0\,,\\ -[\alpha_0], & \text{если}\quad \alpha_0\leq 0;\end{cases}$$

кроме того, при $k=0$ предынтегральный множитель $(\zeta-x_k)^{-\delta_k}$ в (32) заменяется на ζ^{δ_0}.

Из теорем 2 и 3 легко вытекает следуюшее

Утверждение 1. *Решение $\mathcal{F}(\zeta)$ задачи (24)–(26), аналитическое в $\mathbb{H}$ и непрерывное в $\overline{\mathbb{H}} \setminus \mathcal{X}$, существует и единствено с точностью до произвольных вещественных постоянных $q_m^{(k)}$, фигурирующих в (29), и является суммой (27) функций (29) и (31).*

5. ЗАДАЧА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА С КУСОЧНО–ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

5.1. Рассмотрим частный случай задачи (24)–(26), когда коэффициенты $h(x)$ и $c(x)$ являются кусочно–постоянными функциями, т.е.

$$h(x) = h_k, \quad x \in (x_k,\, x_{k+1}); \qquad c(x) = c_k, \quad x \in (x_k,\, x_{k+1}). \tag{33}$$

В этом случае, очевидно, $\Delta_k\, \vartheta = 0$ при всех $k = \overline{0,\, N}$ и, следовательно, первая сумма в (23) исчезает.

Теорема 4. *Если выполняется (33), то функция $\varphi(\zeta)$ из (30) имеет вид*

$$\varphi(\zeta) = \prod_{l=1}^{N} (\zeta - x_l)^{2\,\alpha_l}, \tag{34}$$

а решение $\Psi(\zeta)$ однородной задачи (25), (26), (28), аналитическое в $\mathbb{H}$ и непрерывное в $\overline{\mathbb{H}} \setminus \mathcal{X}$, определяется формулой

$$\Psi(\zeta) = \prod_{l=1}^{N} (\zeta - x_l)^{2\,\alpha_l} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{\varkappa_k} \frac{q_m^{(k)}}{(\zeta - x_k)^m} + \sum_{m=0}^{\varkappa_0} q_m^{(0)}\, \zeta^m \right] \tag{35}$$

и единствено с точностью до фигурирующих в (35) произвольных вещественных постоянных $q_m^{(k)}$.

Очевидно, что с помощью дифференцирования по ζ и последующего неопределенного интегрирования представление (35) приводится к виду интеграла Кристоффеля — Шварца. Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Функция $\Psi(\zeta)$ может быть приведена к виду интеграла Кристоффеля — Шварца*

$$\Psi(\zeta) = \int^{\zeta} \prod_{l=1}^{N} (t - x_l)^{2\,\alpha_l - \varkappa_l - 1}\, P_M(t)\, dt, \tag{36}$$

где степень M полинома $P_M(\zeta)$ равна $M = \sum\limits_{l=0}^{N} \varkappa_l + N - 1$.

5.2. Обратимся к вопросу о преобразовании частного решения $\chi(\zeta)$ из (31), (32) для случая, когда коэффициенты задачи $h(x)$ и $c(x)$ имеют вид (33).

Введем обозначения

$$|\beta| := \sum_{l=1}^{N} \beta_l; \quad \vec{\beta}_k := (\beta_1,\, \ldots,\, \beta_{k-1},\, \beta_{k+2},\, \ldots,\, \beta_N); \quad \vec{a}_k := (a_1,\, \ldots,\, a_{k-1},\, a_{k+2},\, \ldots,\, a_N).$$

Для функции Лауричеллы, определяемой при помощи интегрального представления (1), может быть получено следующее обобщение формулы Якоби, необходимое для проведения требуемого преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left[\prod_{l=1}^{k-1} (w - a_l)^{\beta_l}\, w^{1-|\beta|}\, (w-1)^{\beta_{k+1}} \prod_{l=k+2}^{N} (w - a_l)^{\beta_l}\, F_D^{(N-2)}\, (1 - \beta_k; 1,\, \vec{\beta}_k;\, 2 - \beta_k - \beta_{k+1};\, w,\, \vec{a}_k) \right] = \\ = \prod_{l=1}^{k-1} (w - a_l)^{\beta_l - 1}\, w^{-|\beta|}\, (w-1)^{\beta_{k+1}-1} \prod_{l=k+2}^{N} (w - a_l)^{\beta_l - 1}\, P_{N-2,\,k}\,(w). \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь полином $P_{N-2,\,k}\,(w)$ степени $N-2$ имеет вид

$$P_{N-2,\,k}\,(w) = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k+1}}^{N} (w-a_l) \left[\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k,\,k+1}}^{N} \frac{A_m}{w-a_m} + \frac{A_k}{w}\right],$$

где A_m и A_k даются формулами

$$A_m = \beta_m\,(a_m+1)\,F_D^{(N-2)}\left(1-\beta_k;\,\vec{\beta}_m;\,2-\beta_k-\beta_{k+1};\,\vec{a}_k\right),$$

$$A_k = (1-|\beta|)\,F_D^{(N-2)}\left(1-\beta_k;\,\vec{\beta};\,2-\beta_k-\beta_{k+1};\,\vec{a}_k\right), \qquad \vec{\beta} = (\beta_1,\,\ldots,\,\beta_N).$$

Выражая интеграл в (32) с помощью замены переменной через функцию Лауричеллы и используя формулу (37) типа Якоби, убеждаемся, что каждое из слагаемых в сумме (31), а значит, и вся сумма может быть приведена к виду интеграла Кристоффеля — Шварца. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Если выполняется (33), то частное решение $\chi(\zeta)$ задачи (24)–(26) представимо в виде интеграла Кристоффеля — Шварца*

$$\chi\,(\zeta) = \int^{\zeta} \prod_{l=1}^{N} (t-x_l)^{2\alpha_l-\varkappa_l-1}\,P_K\,(t)\,dt, \tag{38}$$

где степень K полинома $P_K(\zeta)$ равна $K = \sum\limits_{l=1}^{N} \varkappa_l + N - 2$.

Из формулы (27), утверждения 2 и теоремы 5 вытекает следующее

Утверждение 3. *Если выполняется (33), то решение $\mathfrak{F}(\zeta)$ задачи (24)–(26), аналитическое в $\mathbb{H}$ и непрерывное в $\overline{\mathbb{H}}\setminus\mathcal{X}$, существует и единствено с точностью до произвольных вещественных постоянных $q_m^{(k)}$, фигурирующих в (35), является суммой (27) функций (35) и (38) и представимо в виде интеграла Кристоффеля — Шварца*

$$\mathcal{F}(\zeta) = \int^{\zeta} \prod_{l=1}^{N} (t-x_l)^{2\,\alpha_l-\varkappa_l-1}\,\widetilde{P}_M(t)\,dt, \tag{39}$$

где степень M полинома $\widetilde{P}_M(\zeta)$ равна $M = \sum\limits_{l=0}^{N} \varkappa_l + N - 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–01–00723), гранта Фонда содействия отечественной науке и программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН "Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач"(ГК 10002-251/ОМН-03/026-024/240603-805 от 24.06.2003 г.).

Список литературы

[1] *Riemann B.* Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse — Inauguraldissertation: Göttingen, 1851. (Б.Риман. *Сочинения.* М.: Гостехиздат, 1948. С. 49-87.)

[2] *Hilbert D.* Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Functionentheorie. Verhandl. des III Internat. Math. Kondr. Heidelberg, 1904.

[3] *Volterra V.* Sopra alkune condizioni caratteristische per functioni di variabili complessa // Ann. mat. (2). 1883. V. 11.

[4] *Poincaré H.* Leçons de mécanique séleste. T. 3. Paris: 1910, ch. 10.

[5] Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig — Berlin, 1912.

[6] *Noether F.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // Math. Ann. 1920. Bd. 82, H. 1–2, S. 42-63.

[7] *Picard É.* Leçons sur quelques typessimples d'équations aux dérivées partielles. Pasis, 1927.

[8] *Мусхелишвили Н.И.* Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques probléms de la Physique Mathématique. Тбилиси: Изд–во Тбилисск. ун–та, 1922.

[9] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения. Докторская дисс. Тбилиси, 1941; Изв. Казанск. физ.–матем. об–ва. 1949. Т. 14, сер. 3. С. 75-160.

[10] *Векуа И.Н.* Об одной линейной граничной задаче Римана // Тр. Тбилисск. матем. ин–та АН ГрузССР. 1942. Т. 11. С. 109-139.

[11] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1968.

[12] *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

[13] *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.

[14] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

[15] *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1966.

[16] *Wegert E.* Nonlinear Boundary Value Problems for Holomorphic Functions and Singular Equations. – Berlin: Academie Verlag, 1992.

[17] *Efendiev M.A., Wendland W.L.* Nonlinear Riemann — Hilbert problem for muliply connected domains // J. Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1996. V. 27. P. 37-58.

[18] *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

[19] *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М: Изд–во АН СССР, 1959.

[20] *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М: Наука, 1966.

[21] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

[22] *Солдатов А.П.* Краевые задачи теории функций в областях с кусочно–гладкой границей. Тбилиси, 1991.

[23] *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М., 1991.

[24] *Wolfersdorf L.* Abelsche Integralgleihungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi–Gleihung // Math. Nachr. 1965. Bd. 32. Hf. 3-4. S. 161-178.

[25] *Векуа И.Н.* Об интегро–дифференциальном уравнении Прандтля // Прикл. матем. и мех. 1945. Т. 9. №2. С. 143-150.

[26] *Шерман Д.И.* К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1948. №5. С. 595-600.

[27] *Veltkamp G.W.* The drag on a vibrating aerofoil in incompressible fiow // Indagations math. 1958. V. 20. Fasc. 3. P. 278-297

[28] *Jacob C.* Introduction mathématique a la mécaniqe des fluides. Paris: 1959.

[29] *Woods L.C.* The theory of supersonic plane flow. Cambridge, 1961.

[30] *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.

[31] *Соболев С.Л.* Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и и ее приложении к отражению упругих волн // Тр. Сейсм. ин–та. 1930. №11. С. 1-18.

[32] *Захаров В.Е., Монаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов — метод обратной задачи. М: Наука, 1980.

[33] *Латышев А.В.* Векторная краевая задача Римана — Гильберта в граничных задачах рассеяния поляризованного света // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. №7. С. 1109-1127.

[34] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3, часть 2. М.: Наука, 1969; Т. 4. М.: Физматгиз, 1958.

[35] *Фридман М.М.* Дифракция плоской упругой волны относительно прямолинейного разреза, свободного от напряжений // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. №1. С. 21-24.

[36] *Sylvester J.* Linear and nonlinear inverse scattaring // Manuscript, University of Washington. 1997. 47 pp.

[37] *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1965.

[38] *Wegert E., Oestreich D.* On a non-simmetric problem in electrochemical mashining // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 841-854.

[39] *Wegmann R.* Keplerian discs arround magnetised neutro stars — a free boundary problem // Methoden Verfahren Math. Phys. 1991. V. 37. P. 233-253.

[40] *Isakov V.* Prospecting discontinuities by boundary mesurments in inverse problems // Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine. Academy Verlag, 1993. P. 215-223.

[41] *Powell J.* On small perturbation in the two dimentional inverse conductivity problem // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 175. №1. P. 292-304.

[42] *Сыроватский С.И.* О возникновении токовых слоев в плазме с вмороженным сильным магнитным полем // Ж. эксперим. теор. физ. 1971. Т. 60. №3. С.1726-1741.

[43] *Biskamp D.* Magnetic reconnection via current sheets // Phys. Fluids 1986. V. 29. №5. P. 1520-1531.

[44] *Марковский С.А., Сомов Б.В.* Модель магнитного пересоединения в токовом слое с ударными волнами // Физика солнечной плазмы. М.: Наука, 1989. С. 456-472.

[45] *Власов В.И., Марковский С.А., Сомов Б.В.* Об аналитической модели магнитного пересоединения в плазме. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 6.01.1989, №769-В89. 19 с.

[46] *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана — Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2002. №3. Т. 42. С. 277-312.

[47] *Сомов Б.В., Безродных С.И., Власов В.И.* Математические аспекты теории пересоединения в сильных магнитных полях // Известия РАН. Серия физическая. 2006. Т.70. №. С. 16–28.

[48] *Сомов Б.В., Титов В.С., Вернета А.И.* Магнитное пересоединение в солнечных вспышках // Итоги науки и техники. Астрономия. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т.34. С. 136-237.

[49] *Russell C.T.* The configuration of the magnetosphere // "Crit. Probl. Magnetosph. Phys. Proc. Symp. COSPAR, IAGA, and URSI, Madrid, 1972". Washington D.C., 1972. P. 1–15.

[50] *Кадомцев Б.Б.* О неустойчивости срывов в токамаках // Физика плазмы. 1975. Т. 1. №5. С. 710-715.

[51] *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. N.-Y.: Chichester, 1976.

[52] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.

[53] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. I — II.

[54] *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд–во иностр. лит., 1963.

[55] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962.

[56] *P.Henrici*, Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 3. – New York: John Wiley and Sons, 1991.

[57] *Вечеславов В.В., Кокоулин В.И.* Определение параметров конформного преобразования односвязных многоугольных областей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т.13. №4. С. 865-872.

[58] *Trefethen L.N.* Numerical computation of the Schwarz — Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1980. V. 1. P. 82-102.

[59] *Zemach C.* A conformal map formula for difficult cases // J. Comput. Appl. Math. 1986. V. 14. P. 207-215.

[60] *Layne T. Watson.* Globally convergent homotopy methods a tutorial // App. Math/ Comput. 1989. V. 31. P. 369-396.

[61] *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.

[62] *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.

[63] *Власов В.И., Скороходов С.Л.* О развитии метода Треффца // Доклады Академии наук, 1994. Т. 337. №6. С.713-717.

Безродных С.И., Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва, 119991, ул. Вавилова, 40, Россия.

E-mail: `sergeyib@pochta.ru`

Власов В.И., Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва, 119991, ул. Вавилова, 40, Россия.

E-mail: `vlasov@ccas.ru`

ОБ ОДНОМ АБСТРАКТНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ [1]

Богачева Ю.В.,
Воронежский государственный технический университет
г. Воронеж, Россия,
Глушак А.В.,
Белгородский государственный университет
г. Белгород, Россия

Аннотация

In this article one-valued solvability of abstract differential equation with changable factors is established with additional condition on infinity.

Устанавливается однозначная разрешимость абстрактного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами при дополнительном условии на бесконечности.

Интерес к изучению дифференциальных уравнений с дробными производными объясняется тем, что они используются при описании ряда физических, химических и других процессов. Исторические сведения и обзор имеющихся результатов можно найти, например, в [1] – [3]. В настоящей работе, по-видимому, впервые в банаховом пространстве E рассматривается дифференциальное уравнение дробного порядка с переменными коэффициентами вида

$$tD^{\alpha}u(t) + bD^{\beta}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной в E областью определения $D(A)$,

$$D^{\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\, u(s)ds$$

— левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ (см. [1], с. 41), $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

1. Модельный случай.

Исследование начнем с модельного случая, когда в уравнении (1) $b = 0, \alpha = 1/2$. Пусть

$$tD^{1/2}u(t) = Au(t).$$

Применив к левой и правой частям оператор $D^{1/2}$ и воспользовавшись обобщенным правилом Лейбница (см. [1], с. 216)

$$D^{\alpha}(tv(t)) = tD^{\alpha}v(t) + \alpha D^{\alpha-1}v(t),$$

получим уравнение первого порядка

$$u'(t) + \frac{1}{2t}u(t) = \frac{1}{t^2}A^2u(t) \tag{2}$$

Предположив (см. [4], с. 357), что $A = (-B)^{1/2}$, где B — производящий оператор равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t, B)$, найдем решение уравнения (2)

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, T\left(\frac{1}{t}, B\right) u_0, \tag{3}$$

которое удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t}\, u(t)\right) = u_0, \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04 – 01 – 00141

Естественно предположить, что в случае произвольного $\alpha \in (0,1)$ следует задавать дополнительное условие аналогичное условию (4).

Отметим также, что аналогичный метод к уравнению
$$D^{1/2}u(t) = Au(t)$$
с постоянными коэффициентами не применим, поскольку получается неоднородное уравнение
$$u'(t) = A^2u(t) + F(t)$$
с неинтегрируемой в нуле особенностью у функции
$$F(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-3/2}D^{-1/2}u(0).$$

2. Случай $b = 0$.

Пусть в уравнении (1) $b = 0,\ \alpha \in (0,1)$. Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения
$$tD^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{5}$$
удовлетворяющего условию
$$\lim_{t\to\infty}\left(t^{1-\alpha}\ u(t)\right) = u_0. \tag{6}$$
В этом пункте будем предполагать, что оператор $-A$ является производящим оператором C_0-полугруппы $T_\alpha\,(t,-A)$.

Теорема 1. Пусть $u_0 \in D(A)$, C_0-полугруппа $T_\alpha\,(t,-A)$ аналитична в секторе, содержащем точки $\lambda^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, где $\lambda = \sigma + i\tau,\ \sigma > 0,\ \tau \in \mathbf{R}$ и для нее справедлива оценка
$$\|T_\alpha(t,-A)\| \le M\ \exp(\omega t), \quad M \ge 1, \quad \omega < 0. \tag{7}$$
Тогда функция
$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{-\alpha}\exp(\lambda t)T_\alpha\left(\mu\lambda^{1-\alpha},-A\right)u_0\ d\lambda, \tag{8}$$
где $\mu(1-\alpha) = 1$, является единственным решением задачи (5), (4) в классе функций допускающих преобразование Лапласа.

Доказательство. Представление решения по формуле (8) найдено формальным применением преобразования Лапласа. Покажем, что при сделанных предположениях интеграл в (8) сходится и дает решение поставленной задачи (5), (6). Поскольку
$$\left\|T_\alpha(\mu\lambda^{1-\alpha},-A)\right\| \le M\ \exp(\omega Re\left(\mu\lambda^{1-\alpha}\right)),$$
то при некотором $\omega_1 < 0$
$$\|u(t)\| \le M_1\exp(\sigma t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sigma^2+\tau^2\right)^{-\alpha/2}\ \exp\left(\omega_1\tau^{1-\alpha}\right)d\tau < \infty.$$
Таким образом, интеграл в (8) сходится и не зависит от выбора $\sigma > 0$.

Вычислим теперь преобразование Лапласа $U(z) = L_{t\to z}[u(t)]$, считая $Rez > \sigma > 0$. По теореме о вычетах получим
$$U(z) = \int\limits_0^\infty \exp(-zt)\frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{-\alpha}\exp(\lambda t)T_\alpha\left(\mu\lambda^{1-\alpha},-A\right)u_0\ d\lambda dt =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\int\limits_0^\infty \exp(\lambda t - zt)dt\right)\lambda^{-\alpha}T_\alpha\left(\mu\lambda^{1-\alpha},-A\right)u_0\ d\lambda =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\lambda^{-\alpha}}{\lambda - z} T_\alpha \left(\mu \lambda^{1-\alpha}, -A\right) u_0 \; d\lambda = \Gamma(\alpha) z^{-\alpha} T_\alpha \left(\mu z^{1-\alpha}, -A\right) u_0.$$

Легко убедиться, что функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$U'(z) + \frac{\alpha}{z} U(z) = -z^{-\alpha} A U(z), \tag{9}$$

являющимся изображением по Лапласу уравнения (5) и, следовательно, функция $u(t)$ будет решением уравнения (5).

Проверим справедливость начального условия (6). При $\gamma > 0$ имеем

$$\lim_{t \to \infty} \left(t^{1-\alpha} u(t)\right) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} z^{-\alpha} \exp(z) T_\alpha \left(\mu t^{\alpha - 1} z^{1-\alpha}, -A\right) u_0 dz \right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) u_0}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} z^{-\alpha} \exp(z) dz = \frac{\Gamma(\alpha) u_0}{2\pi i} \lim_{\tau \to 1} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} z^{-\alpha} \exp(\tau z) dz =$$

$$= \lim_{\tau \to 1} \tau^{\alpha - 1} u_0 = u_0. \tag{10}$$

Для доказательства единственности решения предположим, что существует функция $u_0(t)$, удовлетворяющая уравнению (5) и начальному условию (6). Тогда функция $U_0(z) = L_{t \to z}[u_0(t)]$ будет решением уравнения (9) и, следовательно, представима в виде

$$U_0(z) = z^{-\alpha} T_\alpha \left(\mu z^{1-\alpha}, -A\right) U_0, \quad U_0 \in D(A).$$

Также как и при доказательстве (10) находим предел

$$\lim_{t \to \infty} t^{1-\alpha} u_0(t) = U_0,$$

который по предположению равен нулю. Следовательно, $u_0(t) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если $\alpha = 1/2$ и $A = (-B)^{1/2}$ (см. п. 1), то интеграл в формуле (8) вычисляется и мы приходим к равенству (3).

3. Случай $b < 0$.

Пусть в уравнении (1) $b < 0$, $0 < \beta < \alpha < 1$. Тогда аналогично теореме 1 устанавливается, что функция

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda^{-\alpha} \exp\left(\frac{b \lambda^{\beta - \alpha + 1}}{\beta - \alpha + 1} + \lambda t \right) T_\alpha \left(\mu \lambda^{1-\alpha}, -A\right) u_0 \; d\lambda, \tag{11}$$

является единственным решением задачи (1), (6). При этом полугруппа $T_\alpha (t, -A)$ может быть и растущей, т.е. в неравенстве (7) $\omega \in \mathbf{R}$, поскольку сходимость интеграла в (11) обеспечивается условием $b < 0$, $0 < \beta < \alpha < 1$.

Замечание 2. При $\beta = \alpha$ решение задачи (1), (6) также определяется формулой (11), но ограничения на полугруппу $T_\alpha (t, -A)$ такие же как в теореме 1. При $0 < \alpha < \beta < 1$ интеграл в правой части (11) расходится.

4. Случай $b > 0$.

Пусть в уравнении (1) $b > 0$, $0 < \alpha < \beta < 1$. Эти ограничения на параметры уравнения (1) также обеспечивает сходимость интеграла в правой части (11) для произвольной C_0-полугруппы $T_\alpha (t, -A)$. При $\beta = \alpha$ решение определяется формулой (11), но ограничения на полугруппу $T_\alpha (t, -A)$ такие же как в теореме 1. При $0 < \beta < \alpha < 1$ интеграл в правой части (11) расходится.

Список литературы

[1] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987.

[2] *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003.

[3] *Псху А.В.* К теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик. 2005.

[4] *Иосида К.* Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ.

Хатько В.В.
Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия

1. Введение.

Статья посвящена некоторым вопросам спектральной теории линейных отношений (многозначных линейных операторов). Теория линейных отношений является, в некотором смысле, обобщением теории операторов. Поэтому метод обобщения фактов из теории линейных операторов на теорию линейных отношений часто используется для развития теории линейных отношений. В полной мере это можно отнести и к спектральной теории линейных отношений, спектральные свойства которых часто являются аналогом некоторых спектральных свойств линейных операторов. В статье рассматриваются вопросы, связанные с классификацией спектра линейного отношения. Вводится понятие фактор-отношения, с помощью которого формулируется один из результатов статьи.

Приведем некоторые используемые ниже понятия из теории линейных отношений.

Пусть X и Y - комплексные банаховы пространства. Любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset X \times Y$ называется *линейным отношением* между банаховыми пространствами X и Y. Если оно замкнуто в $X \times Y$, то линейное отношение называется *замкнутым.*

Подпространство $D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid$ существует $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in \mathcal{A}\}$ называется *областью определения* линейного отношения $\mathcal{A} \subset X \times Y$. *Ядро* отношения есть $Ker\mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) \mid (x, 0) \in \mathcal{A}\}$.

Через $\mathcal{A}x$, $x \in D(\mathcal{A})$, обозначим множество $\{y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Отметим, что для всех $x \in D(\mathcal{A})$ множество $\mathcal{A}x$ представимо в виде $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для любого вектора y из $\mathcal{A}x$.

Область значений $Im\mathcal{A} = \{y \in Y \mid \exists\, x \in D(\mathcal{A}),\ (x, y) \in \mathcal{A}\} = \bigcup\limits_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$.

Суммой двух линейных отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset X \times Y$ называется линейное отношение из $X \times Y$ вида $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}),\ y \in \mathcal{A}x\ +\ \mathcal{B}x\}$. $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$. Под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x$ и $\mathcal{B}x$.

Произведением двух линейных отношений $\mathcal{A} \subset X \times Y$ и $\mathcal{B} \subset Y \times Z$, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in X \times Z \mid$ существует вектор y из $D(\mathcal{B})$ такой, что $(x, y) \in \mathcal{A},\ (y, z) \in \mathcal{B}\}$.

Обратным к линейному отношению $\mathcal{A} \subset X \times Y$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \mathcal{A}\} \subset Y \times X$.

Каждое линейное отношение $\mathcal{A} \subset X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{\mathcal{A}} : D(\mathcal{A}) \subset X \to 2^Y$, где $\widetilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются.

Множество замкнутых линейных отношений из X в Y обозначим $LR(X, Y)$. Если $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X, X)$. Множество линейных замкнутых операторов $LO(X, Y)$ считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X, Y)$. Если $X = Y$, то $LO(X) = LO(X, X)$ и $EndX$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Итак, $EndX \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Отношение $\mathcal{A} \in LR(X, Y)$ называется *инъективным*, если $Ker\mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $Im\mathcal{A} = Y$.

Заметим, что для любых векторов $x, y \in D(\mathcal{A})$ возможны только два случая :

1) $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$;
2) $\mathcal{A}x \cap \mathcal{A}y = \varnothing$.

Из условия $Ker\mathcal{A} = \{0\}$ следует, что $\mathcal{A}x \cap \mathcal{A}y = \varnothing$ для всех $x \neq y$ из $D(\mathcal{A})$.

2. Введение в спектральную теорию линейных отношений.

Определение 2.1. *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in EndX$.

Определение 2.2. Отображение

$$R(\,\cdot\,,\mathcal{A})\ :\ \rho(\mathcal{A}) \to EndX, \quad R(\lambda,\mathcal{A}) = (\mathcal{A}-\lambda I)^{-1},\ \lambda\in\rho(\mathcal{A})$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A}$.

Определение 2.3. *Спектром* линейного отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* линейного отношения $\mathcal{A}$, если $Ker(\mathcal{A}-\lambda I) \neq \{0\}$. Любой ненулевой вектор x из $Ker(\mathcal{A}-\lambda I)$ называется собственным вектором отношения $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ.

Определение 2.4. *Расширенным спектром* отношения $\mathcal{A}\in LR(X)$ называется подмножество $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} \in EndX$. В противном случае полагается $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})\cup\{\infty\}$. Множество $\widetilde{\rho}(\mathcal{A}) = \widetilde{\mathbb{C}}\backslash\widetilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называют *расширенным резольвентным множеством* линейного отношения $\mathcal{A}$.

Определение 2.5. *Точечным спектром* отношения $\mathcal{A}\in LR(X)$ называется множество $\sigma_p(\mathcal{A})$ всех собственных значений отношения $\mathcal{A}$. Множество $\sigma_c(\mathcal{A})$ всех $\lambda\in\mathbb{C}$, таких что $Ker(A-\lambda I) = 0$, $Im(A-\lambda I) \neq \overline{Im(A-\lambda I)} = X$, называется *непрерывным спектром* отношения $\mathcal{A}$, а множество $\sigma_r(A)$, состоящее из всех $\lambda\in\mathbb{C}$, таких что $Ker(A-\lambda I) = 0$, $\overline{Im(A-\lambda I)} \neq X$, называется *остаточным спектром* отношения $\mathcal{A}$.

Спектр линейного отношения представляется в виде объединения трех представленных в определении 2.5 взаимно-непересекающихся множеств:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$$

Можно выделить еще один вид спектра отношения, который представлен в следующем определении.

Определение 2.6. Множество $\sigma_a(\mathcal{A})$ всех $\lambda\in\mathbb{C}$ для которых существует последовательность $\{x_n\}$, такая что $\|x_n\| = 1$ для всех n и $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}-\lambda I)x_n = 0$, называется *аппроксимативным точечным спектром* линейного отношения $\mathcal{A}$.

Следующий результат с доказательством можно найти в статье [1].

Теорема 2.1. *Для линейного отношения $\mathcal{A}\in LR(X)$ справедливо равенство $\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\frac{1}{\lambda}\ :\ \lambda\in\widetilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})\}$.*

Ниже представлен подобный результат с учетом классификации спектра.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{A}\in LR(X), \lambda\in\sigma(\mathcal{A}), \lambda\neq 0$. Тогда:*

1) если $\lambda\in\sigma_p(\mathcal{A})$, то $1/\lambda\in\sigma_p(\mathcal{A}^{-1})$;

2) если $\lambda\in\sigma_c(\mathcal{A})$, то $1/\lambda\in\sigma_c(\mathcal{A}^{-1})$;

3) если $\lambda\in\sigma_r(\mathcal{A})$, то $1/\lambda\in\sigma_r(\mathcal{A}^{-1})$;

4) если $\lambda\in\sigma_a(\mathcal{A})$, то $1/\lambda\in\sigma_a(\mathcal{A}^{-1})$;

◀ 1) если $\lambda\in\sigma_p(\mathcal{A})$, то существует $x\in X$, такой что $(x,\lambda x)\in\mathcal{A}$. Тогда из линейности $\mathcal{A}$ следует, что $(\frac{1}{\lambda}x, x)\in\mathcal{A}$, то есть $1/\lambda\in\sigma_p(\mathcal{A}^{-1})$.

2), 3) $Im(\mathcal{A}-\lambda I) = \{y-\lambda x|(x,y)\in\mathcal{A}\}$, $Im(\mathcal{A}^{-1}-\frac{1}{\lambda}I) = \{x-\frac{1}{\lambda}y|(x,y)\in\mathcal{A}\}$, а так как образ линейного отношения является линейным пространством, то $Im(\mathcal{A}-\lambda I) = Im(\mathcal{A}^{-1}-\frac{1}{\lambda}I)$, откуда сразу следует 2), 3).

4) Пусть $\lambda\in\sigma_a(\mathcal{A})$, то есть существуют последовательности $\{x_n\},\{y_n\}$, такие что для всех n $\|x_n\| = 1, y_n\in\mathcal{A}x_n$ и $y_n-\lambda x_n\to 0$. Тогда $\frac{1}{\lambda}y_n - x_n\to 0$. $\|\lambda x_n\| = \|\lambda x_n - y_n + y_n\| \leq \|y_n-\lambda x_n\| + \|y_n\|$. $|\lambda| - \|y_n-\lambda x_n\| \leq \|y_n\|$. Так как $y_n-\lambda x_n\to 0$, то существует N, такое что для любого $n > N$, $\|y_n\| \geq M > 0$. Следовательно, последовательность $\frac{1}{\|y_n\|}$ ограничена, поэтому $\frac{x_n}{\|y_n\|} - \frac{1}{\lambda}\frac{y_n}{\|y_n\|}\to 0$. Получаем, что $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_a(\mathcal{A})$. ▶

Рассмотрим отдельно точки 0 и ∞ расширенного спектра линейного отношения $\mathcal{A}$.

1) Пусть $0\in\sigma_p(\mathcal{A})$. Тогда $Ker\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}0 \neq \{0\}$, то есть $\infty\in\sigma_p(\mathcal{A})$, если $A0\neq\{0\}$, то есть $\mathcal{A}$ является многозначным отображением.

2) Пусть $0\in\sigma_{c(r)}(\mathcal{A})$, то есть $Im\mathcal{A} \neq \overline{Im\mathcal{A}} = X$ ($\overline{\mathcal{A}}\neq X$), тогда $\infty\in\sigma_{c(r)}(\mathcal{A})$, если $D(\mathcal{A}) \neq \overline{D(\mathcal{A})} = X$ ($\overline{D(\mathcal{A})}\neq X$).

3) Пусть $0 \in \sigma_a(\mathcal{A})$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}, \|x_n\| = 1, \mathcal{A}x_n \to 0$, то есть $\infty \in \sigma_a(\mathcal{A})$, если существует такая последовательность $\{y_n\}, y_n \to 0$, что для всех y_n существует $x_n \in \mathcal{A}y_n$, такой что $\|x_n\| = 1$.

3. Определение и некоторые свойства фактор-отношений.

В этом пункте вводится понятие фактор-отношения, обобщающее понятие фактор-оператора. С помощью понятия фактор-отношения формулируется один из результатов статьи.

Определение 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$. Замкнутое линейное подпространство $X_0 \subset X$ назовем *инвариантным* относительно отношения $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x \cap X_0 \neq \varnothing$ для любого $x \in X_0 \cap D(\mathcal{A})$. Отношение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap (X_0 \times X_0)$ назовем *сужением* (или *частью*) отношения $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство X_0.

Если линейное отношение является линейным оператором, то приведенное определение является общепринятым определением инвариантного подпространства (см., например [5]). Сужение отношения $\mathcal{A}$ на инвариантное подпространство X_0 обозначим символом $\mathcal{A}|X_0$.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$, $M \subset X$ - замкнутое инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$ и X/M - фактор-пространство. Тогда линейное отношение $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/M \in LR(X/M)$, определенное следующими равенствами

$$D(\widetilde{\mathcal{A}}) = \{\tilde{x} \in X/M : \tilde{x} \cap D(\mathcal{A}) \neq \varnothing\},$$
$$\widetilde{\mathcal{A}}\tilde{x} = \widetilde{\mathcal{A}x_1},$$

где $x_1 \in \tilde{x} \cap D(\mathcal{A})$, будем называть *фактор-отношением.*

Для доказазательства корректности определения 3.2 приведем ряд лемм.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ и $M \subset X$ - инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in (x + M) \cap D(\mathcal{A})$, где x - произвольный элемент из X, верно равенство*

$$\widetilde{\mathcal{A}x_1} = \widetilde{\mathcal{A}x_2}.$$

◀ Из определения линейного отношения следует, что

$$\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = y + \mathcal{A}0.$$

Поскольку $x_1, x_2 \in x + M$, то $x_1 - x_2 \in M$, а так как M - инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$, в выше приведенном неравенстве можно взять $y \in M$. Пусть $y_1 \in \mathcal{A}x_1$ и $y_2 \in \mathcal{A}x_2$, тогда получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 + M = \mathcal{A}0 + M,\\ y_1 - y_2 + \mathcal{A}0 + M = \mathcal{A}0 + M,\\ y_1 + \mathcal{A}0 + M = y_2 + \mathcal{A}0 + M,\\ \mathcal{A}x_1 + M = \mathcal{A}x_2 + M. \ \blacktriangleright\end{gathered}$$

Лемма 3.2. *Пусть X - линейное пространство и $\mathcal{A} \subset X \times X$ - бинарное отношение на нем. Отношение $\mathcal{A}$ является линейным тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

1) $D(\mathcal{A})$ - линейное пространство;

2) $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$ для любых $x_1, x_2 \in D(\mathcal{A})$;

3) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$ для любых $x \in D(\mathcal{A})$ и $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$.

Перейдем к доказательству корректности определения фактор-отношения.

Теорема 3.1. *Определение 3.2 корректно.*

◀ Из леммы 3.1 следует, что $\widetilde{\mathcal{A}}\tilde{x}$ определено корректно.

Докажем, что $\widetilde{\mathcal{A}}$ является линейным отношением. Для этого воспользуемся леммой 3.2 и покажем, что выполнены все три ее условия:

1). Пусть $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$. Тогда $\widetilde{x_1} = x_1 + M$, $\widetilde{x_2} = x_2 + M$, где $x_1, x_2 \in D(\mathcal{A}) \cap M$, и $\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2} = x_1 + x_2 + M$. Так как $x_1 + x_2 \in D(\mathcal{A})$, то $\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2} \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$. Аналогичным образом доказывается, что если $\tilde{x} \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$, то для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\tilde{x} \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$. Следовательно, $D(\widetilde{\mathcal{A}})$ - линейное пространство.

2). Пусть $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$. Тогда $\widetilde{x_1} = x_1 + M$, $\widetilde{x_2} = x_2 + M$, где $x_1, x_2 \in D(\mathcal{A}) \cap M$, и $\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2} = x_1 + x_2 + M$. Получаем

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{x_1} + \widetilde{x_2}) = \mathcal{A}(x_1 + x_2) + M = \mathcal{A}x_1 + M + \mathcal{A}x_2 + M = \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{x_1} + \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{x_2}.$$

3). Доказывается аналогично 2). ►

Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$, M - инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/M$. Тогда условимся далее в этом пункте если $\tilde{x} \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$, то в записи $\tilde{x} = x + M$ считать x элементом $D(\mathcal{A})$.

В следующей теореме приводится важное свойство фактор-отношений (аналог подобного свойства для фактор-операторов), которое позволяет оценить спектр отношения через спектры фактор-отношения и сужения отношения на некоторое инвариантное подпространство.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$, M - замкнутое инвариантное подпространство относительно $\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/M$, $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}|M$. Тогда любые два из следующих утверждений влекут третье:*

1) $\mathcal{A}$ - непрерывно обратимо;

2) $\widetilde{\mathcal{A}}$ - непрерывно обратимо;

3) $\mathcal{A}_M$ - непрерывно обратимо.

◄ $2), 3) \Rightarrow 1)$. Сюръективность. Пусть $\tilde{y} \in Im\widetilde{\mathcal{A}}$, следовательно, существует такой $\tilde{x} = x + M \in D(\widetilde{\mathcal{A}})$, что $\tilde{y} \in \widetilde{\mathcal{A}}\tilde{x}$. Представим $\widetilde{\mathcal{A}}\tilde{x}$ в виде

$$\widetilde{\mathcal{A}}\tilde{x} = \widetilde{\mathcal{A}}(x + M) = \mathcal{A}x + M.$$

Очевидно, что $\mathcal{A}x \subset Im\mathcal{A}$, а так как $\mathcal{A}_M$ - сюръективно, то и $M \subset Im\mathcal{A}$. Следовательно, для любого $\tilde{y} \in Im\widetilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{y} = y + M \subset Im\mathcal{A}$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ - сюръективно. Отсюда сразу вытекает, что $Im\mathcal{A} = X$.

Инъективность. Пусть $x \in Ker\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}x = \mathcal{A}0$. Тогда $\widetilde{\mathcal{A}}(x + M) = \mathcal{A}0 + M$. Из инъективности $\widetilde{\mathcal{A}}$ следует, что $x \in M \cap Ker\mathcal{A}$. В свою очередь из инъективности $\mathcal{A}_M$ следует, что $x = 0$.

$1), 2) \Rightarrow 3)$. Сюръективность. Предположим противное, что существует $y \in M$, такой, что для любого $x \in D(\mathcal{A}_M)$, $y \notin \mathcal{A}_M x$. Тогда из сюръективности $\mathcal{A}$ следует существование такого $x' \in D(\mathcal{A})\backslash M$, что $y \in \mathcal{A}x' \cap M$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{\mathcal{A}}(x' + M) = \mathcal{A}0 + M$, а так как $\widetilde{\mathcal{A}}$ - инъективно, то $x' \in M$. Получили противоречие.

Инъективность $\mathcal{A}_M$ сразу следует из инъективности $\mathcal{A}$.

$1), 3) \Rightarrow 2)$. Сюръективность $\widetilde{\mathcal{A}}$ сразу следует из сюръективности $\mathcal{A}$.

Инъективность. Пусть $\tilde{x} \in Ker\widetilde{\mathcal{A}}$, т.е. $\widetilde{\mathcal{A}}\tilde{x} = \widetilde{\mathcal{A}}(x + M) = \mathcal{A}0 + M$, следовательно, $\mathcal{A}x = \mathcal{A}0$ или $\mathcal{A}x \subset M$. В первом случае из инъективности $\mathcal{A}$ следует, что $x = 0$, во втором случае из сюръективности $\mathcal{A}_M$ и из инъективности $\mathcal{A}$ следует, что $x \in M$. Отсюда вытекает, что $\tilde{x} = x + M = M = \tilde{0}$. ►

Следствие 3.1. *Справедливо следующее включение $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_M)$.*

◄ Справедливость данного утверждения вытекает из следующих очевидных равенств

$$(\mathcal{A} - \lambda I)/M = \mathcal{A}/M - \lambda I/M, \quad (\mathcal{A} - \lambda I)|M = \mathcal{A}|M - \lambda I|M,$$

при которых имеет место цепочка эквивалентных утверждений:

$\lambda \in \rho(\widetilde{\mathcal{A}}) \cap \rho(\mathcal{A}_M)$, следовательно $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$;

$\lambda \notin \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_M)$, следовательно $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$;

$\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, следовательно $\lambda \in \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) \cup \sigma(\mathcal{A}_M)$. ►

Список литературы

[1] *Баскаков А.Г., Чернышов К.И.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов. // Матем. сб. 2002 Т.193, №11, с. 3-35.

[2] *Cross R.* Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

[3] *Загорский А.С., Хатько В.В.* О некоторых свойствах линейных отношений на конечномерных линейных пространствах. // Вестник ВГУ. 2002. Серия физика - математика. №2. с. 59-62.

[4] *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронежского университета, 1987.

[5] *Баскаков А.Г.* Лекции по алгебре. Воронеж : Изд-во ВГУ, 2001.

[6] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[7] *Рудин У.* Функциональный анализ. "Меркурий - ПРЕСС", 2000.

О МОМЕНТАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ СО СЛУЧАЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

И.И.Ковтун
Национальный аграрный университет
Киев, Украина

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Риккати получили свое название по имени знаменитого итальянского математика Якопо Риккати (1676-1754), который изучая задачу восстановления уравнения кривой по свойствам кривизны этой кривой, получил уравнение

$$b\frac{dx}{dt} = at^{\alpha} + x^2. \tag{1}$$

Д.Бернулли в одной из своих работ показал, что это уравнение допускает разделение переменных при

$$\alpha = \frac{4n}{1-2n} \quad (n \in Z). \tag{2}$$

Если $n \to \infty$, то $\alpha = -2$, уравнение (1) принимает вид

$$b\frac{dx}{dt} = \frac{a}{t^2} + x^2$$

и интегрируется в квадратурах.

Как показал Лиувиль (1841), при всех остальных значениях α, не удовлетворяющих условию (2), уравнение (1) в квадратурах не интегрируется. Для интегрирования таких уравнений применяются численные методы.

К уравнениям Риккати приводят задачи теоретической и прикладной механики, гидродинамики. Уравнения Риккати появляются в теории конформных отображений [7], теории вполне интегрируемых гамильтоновых систем [3], квантовой теории поля [8], [11] и др. Геометрические аспекты теории дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью рассмотрены в [4].

Рассмотрим, например, разгон ротора газотурбинного двигателя [1]. Пусть на ротор действуют момент сил сопротивления, движущий момент и момент инерции. Пусть момент сил сопротивления пропорционален квадрату частоты вращения, а движущий момент пропорционален кубу времени. Условие динамического равновесия такого ротора относительно оси вращения Oz есть равенство нулю суммы всех моментов, т.е.

$$\sum M_z = M_d + M_c + M_{in} = 0.$$

По условию

$M_d = k_1 t^3, \quad M_c = -k_2\omega^2, \quad M_{in} = -I\frac{d\omega}{dt}, \quad k_1, k_2, I-$ постоянные. Тогда имеем

$$k_1 t^3 - k_2\omega^2 - I\frac{d\omega}{dt} = 0$$

или

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_1}{I}t^3 - \frac{k_2}{I}\omega^2.$$

Таким образом, получили уравнение Риккати вида (1).

Заметим, что уравнение (1) принято называть специальным уравнением Риккати, а уравнением Риккати называть уравнение, в котором правая часть есть квадратичная функция от искомой функции x, т.е. уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x^2 + Q(t)x + R(t).$$

Причем подстановка

$$x = \pm\frac{1}{P(t)}\left\{z \mp \frac{1}{2}\left[Q(t) + \frac{P'(t)}{P(t)}\right]\right\}$$

приводит уравнение Риккати к виду

$$z' = \pm z^2 + R_1(t),$$

где

$$R_1(t) = \pm\left\{\frac{1}{4}\left[Q(t) + \frac{P'(t)}{P(t)}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[Q'(t) + \frac{P''(t)}{P(t)} - \frac{P'(t)^2}{P(t)}\right]\right\} \pm R(t)P(t).$$

Это уравнение называется каноническим уравнением Риккати.

Рассмотрим каноническое уравнение Риккати со случайным коэффициентом $\xi(t,\omega)$

$$z' + z^2 + (a(t) + \xi(t,\omega)) = 0 \tag{3}$$

и начальным условием

$$z(0,\omega) = z_0(\omega). \tag{4}$$

Здесь случайный процесс $z(t,\omega)$ удовлетворяет уравнению (3) почти для всех $\omega \in \Omega$ ($\Omega-$ вероятностное пространство).

При некоторых условиях на случайный процесс $\xi(t,\omega)$ определим моменты уравнения (3) с начальными условиями (4).

Существует связь канонического уравнения Риккати и дифференциального уравнения второго порядка с таким же коэффициентом. С помощью замены

$$z = \frac{x'}{x} \tag{5}$$

задача (3) - (4) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a(t) + \xi(t,\omega))x = 0 \tag{6}$$

с начальными условиями

$$x(0,\omega) = x_0(\omega), \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = y_0(\omega), \tag{7}$$

где $x_0(\omega)$ и $y_0(\omega)$ такие, что $\frac{y_0(\omega)}{x_0(\omega)} = z_0(\omega)$. Случайный процесс $x(t,\omega)$ удовлетворяет уравнению (6) почти для всех $\omega \in \Omega$.

2. МОМЕНТЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть случайный процесс $\xi(t,\omega)-$ негауссовский случайный процесс, удовлетворяющий условиям

1. $\xi(t,\omega)-$ непрерывный случайный процесс, $\xi(0,\omega) = 0$, ковариационная функция $<\xi(t,\cdot)\xi(\tau,\cdot)>= K(t,\tau)$;
2. $\xi'(t,\omega)-$ дельта-коррелированный случайный процесс, ковариационная функция которого

$$Q(t,s) = \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t \partial s} = c(t,s)\delta(t-s) \quad (c(t,s) = c(s,t)).$$

Или $\xi(t,\omega)-$ случайный процесс с известными кумулятивными функциями $K_j(t_1,...,t_j,t) = s_j(t)\delta(t_1-t_2)\cdots\delta(t_j-t)$ $(\delta(t_i-t_{i+1})-$ дельта-функции, $i = 1,2,...,j)$. Предполагаем, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} js_j(t)$ равномерно сходится.

Решение $x(t,\omega)$ задачи (6) - (7) является функционалом случайного процесса $\xi(t,\omega)$, моменты которого среднее $m_x(t) =< x(t,\cdot) >$ и ковариационная функция $K(t,s) =< x(t,\cdot)x(s,\cdot) >$.

Для нахождения среднего $m_x(t)$ уравнения (6) переходим от уравнения второго порядка (6) к системе двух уравнений первого порядка $(y_1(t,\omega) = x(t,\omega))$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dy_1}{dt} & = & y_2(t,\omega), \\ \frac{dy_2}{dt} & = & -(k^2 + \xi(t,\omega))y_1(t,\omega) \end{array}\right. \tag{8}$$

с начальными условиями

$$y_1(0,\omega)=x_0(\omega)=y_1^0, \qquad y_2(t,\omega)=y_0(\omega)=y_2^0.$$

Такая система является частным случаем более общей системы двух уравнений второго порядка, коэффициенты которой возмущены известными независимыми случайными процессами [9], [10]. Усредняя систему (8), получим

$$\begin{cases} \frac{d<y_1>}{dt} &= &< y_2(t,\cdot) >, \\ \frac{d<y_2>}{dt} &= &-k^2 < y_1(t,\cdot) > + < \xi(t,\cdot) y_1(t,\cdot) > . \end{cases} \tag{9}$$

Из среднего от произведения случайного процесса $\xi(t,\omega)$ и функционала от этого процесса $y_1(t,\omega)$ нужно выделить среднее $< y_1(t,\cdot) >$. Используя формулу из [2], [5], получим

$$< \xi(t,\cdot) y_1(t,\cdot) >= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(t)}{(j-1)!} \left\langle \frac{\delta^j y_1(t,\cdot)}{\delta\xi(t,\cdot)\cdots\delta\xi(t,\cdot)} \right\rangle,$$

где

$$\frac{\delta^j y_1(t,\omega)}{\delta\xi(\tau_1,\omega)\cdots\delta\xi(\tau_j,\omega)} -$$

вариационные производные $j-$го порядка. Используя систему интегральных уравнений, эквивалентную системе (8)

$$\begin{cases} y_1(t,\omega) &= &y_1^0(\omega) + \int\limits_0^t y_2(\tau,\omega)d\tau, \\ y_2(t,\omega) &= &y_2^0(\omega) - k^2 \int\limits_0^t y_1(\tau,\omega)d\tau - \int\limits_0^t y_2(\tau,\omega)\xi(\tau,\omega)d\tau, \end{cases}$$

и условие причинности: $y_1(t,\omega)$ зависит функционально от предыдущих значений $\xi(z,\omega)$ на интервале $0 \le z \le t$ и не изменяется при варьировании функционалов вне этого интервала, можно показать [6], что

$$\frac{\delta^j y_1(t,\omega)}{\delta\xi(t,\omega)\cdots\delta\xi(t,\omega)} = j! y_1(t,\omega).$$

Тогда система для нахождения среднего решения уравнения (6) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d<y_1>}{dt} &= &< y_2(t,\cdot) >, \\ \frac{d<y_2>}{dt} &= &-k^2 < y_1(t,\cdot) > - \sum\limits_{j=1}^{\infty} j s_j(t) < y_1(t,\cdot) > . \end{cases}$$

Или, учитывая, что $y_1(t,\omega)=x(t,\omega)$, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения среднего $m_x(t)$:

$$\frac{d^2 m_x}{dt^2} + \left(k^2 + \sum_{j=1}^{\infty} j s_j(t)\right) m_x = 0, \tag{10}$$

начальные условия для которого имеют вид

$$m_x(0) =< x_0(\cdot) >, \qquad \frac{dm_x}{dt}\Big|_{t=0} =< y_0(\cdot) > .$$

Для нахождения ковариационной функции решения при $t > s$ $\hat{q}(t,s) =< x(t,\cdot)x(s,\cdot) >$ используем систему (8) . Последовательно умножая уравнения системы (8) на $y_1(s,\omega)$ и $y_2(s,\omega)$ и усредняя полученные уравнения, имеем

$$\begin{cases} \frac{d\hat{q}_{11}}{dt} &= &\hat{q}_{21}, \\ \frac{d\hat{q}_{21}}{dt} &= &-k^2 \hat{q}_{11} - < \xi(t,\cdot) y_1(t,\cdot) y_1(s,\cdot) >, \\ \frac{d\hat{q}_{12}}{dt} &= &\hat{q}_{22}, \\ \frac{d\hat{q}_{22}}{dt} &= &-k^2 \hat{q}_{12} - < \xi(t,\cdot) y_1(t,\cdot) y_2(s,\cdot) >, \end{cases} \tag{11}$$

где $\hat{q}_{ik} =< y_i(t,\cdot) y_k(s,\cdot) >, \quad i,k=1,2.$

Для средних значений от произведений $<\xi(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_1(s,\cdot)>$ и $<\xi(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_2(s,\cdot)>$ имеем [9]

$$<\xi(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_1(s,\cdot)>=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s_j(t)}{(j-1)!}\left\langle\frac{\delta^j(y_1(t,\cdot)y_1(s,\cdot)}{\delta\xi(t,\cdot)\cdots\delta\xi(t,\cdot)}\right\rangle,$$

$$<\xi(t,\cdot)y_1(t,\cdot)y_2(s,\cdot)>=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{s_j(t)}{(j-1)!}\left\langle\frac{\delta^j(y_1(t,\cdot)y_2(s,\cdot)}{\delta\xi(t,\cdot)\cdots\delta\xi(t,\cdot)}\right\rangle,$$

где

$$\frac{\delta^j(y_1(t,\omega)y_1(s,\omega))}{\delta\xi(t,\omega)\cdots\delta\xi(t,\omega)}=0,\quad \frac{\delta^j(y_1(t,\omega)y_2(s,\omega))}{\delta\xi(t,\omega)\cdots\delta\xi(t,\omega)}=j!y_1(t,\omega)y_2(s,\omega).$$

Тогда система (11) принимает вид

$$\begin{cases}\frac{d\hat{q}_{11}}{dt} &= \hat{q}_{21},\\ \frac{d\hat{q}_{21}}{dt} &= -k^2\hat{q}_{11},\\ \frac{d\hat{q}_{12}}{dt} &= \hat{q}_{22},\\ \frac{d\hat{q}_{22}}{dt} &= -(k^2+\sum\limits_{j=1}^{\infty}js_j(t))\hat{q}_{12}.\end{cases}\tag{12}$$

Аналогичную систему получим и для $\check{q}_{ik}=<y_i(t,\cdot)y_k(s,\cdot)>\quad(i,k=1,2)$ при $t<s$.

Начальными условиями для этой системы являются дисперсии $\hat{q}_{ik}(t,t)=\check{q}_{ik}(t,t)=D_{ik}(t)\quad(i,k=1,2),\quad D_{12}(t)=D_{21}(t),$ для нахождения которых получаем систему

$$\begin{cases}\frac{dD_{11}}{dt} &= 2D_{12}(t),\\ \frac{dD_{12}}{dt} &= -k^2D_{11}(t)+D_{22}(t)+\sum\limits_{j=1}^{\infty}j(j+1)s_{j+1}(t)D_{12}(t),\\ \frac{dD_{22}}{dt} &= 2D_{12}(t)\end{cases}$$

или дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2D_{12}}{dt^2}+\sum_{j=1}^{\infty}j(j+1)s_j(t)\frac{dD_{12}}{dt}+\left(2(k^2+1)+\sum_{j=1}^{\infty}j(j+1)s'(t)\right)D_{12}=0$$

с начальными условиями

$$D_{12}(0)=<y_1^0(\cdot)y_2^0(\cdot)>,\quad \left.\frac{dD_{12}}{dt}\right|_{t=0}=<y_1^0(\cdot)y_2^{0\prime}(\cdot)>.$$

3. МОМЕНТЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ СО СЛУЧАЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Установим выражение моментов решения $z(t,\omega)$ уравнения Риккати (3) через моменты решения $x(t,\omega)$ дифференциального уравнения второго порядка (6) $m_x(t)=<x(t,\cdot)>,\quad K_x(t,s)=<x(t,\cdot)-m_x(t),x(s,\cdot)-m_x(s)>$.

Если $x-$ случайная величина, то для функции от этой случайной величины $u=\varphi(x)\quad(\varphi(\alpha)-$ случайная функция на R^1) имеем

$$\varphi(x)\approx\varphi(m_x)+\varphi'(m_x)[x-m_x].$$

Тогда

$$m_u=\varphi(m_x).$$

Если D_x- дисперсия случайной величины $x,$ то дисперсия функции $u=\varphi(x)$

$$D_u=<[\varphi(x)-m_x]^2\approx[\varphi'(m_x)(x-m_x)]^2>=[\varphi'(m_x)]^2D_x.$$

Пусть $x(t)-$ случайная функция и пусть $u(t)=\varphi(x(t))$. Покажем, что

$$\varphi(x(t))\approx\varphi(m_x(t))+\varphi'_\alpha(m_x(t))[x(t)-m_x(t)].$$

Действительно,

$$\varphi(x(t)) \approx \varphi(m_x(t)) + \int\limits_0^t \left.\frac{\delta\varphi(x(t))}{\delta x(\tau)}\right|_{x=m_x} [x(\tau) - m_x(\tau)]d\tau.$$

Так как

$$\frac{\delta\varphi(x(t))}{\delta x(\tau)} = \varphi'_\alpha(x(\tau))\delta(x-\tau),$$

то получаем, что

$$\varphi(x(t)) \approx \varphi(m_x(t)) + \varphi'_\alpha(m_x(t))[x(t) - m_x(t)]. \qquad (13)$$

Отсюда имеем среднее для функции u от случайной функции $x(t)$

$$m_u(t) = \varphi(m_x(t)). \qquad (14)$$

Найдем ковариационную функцию $K_u(t,s)$. Учитывая (13) и (14), имеем

$$K_u(t,s) =< [\varphi(x(t)) - m_u(t)][\varphi(x(s)) - m_u(s)] >\approx$$
$$\approx< [\varphi'_\alpha(m_x(t))(x(t)) - m_x(t)][\varphi'_\alpha(m_x(s))(x(s)) - m_x(s)] >=$$
$$= \varphi'_\alpha(m_x(t))\varphi'_\alpha(m_x(s))K_x(t,s),$$

т.е.

$$K_u(t,s) \approx \varphi'_\alpha(m_x(t))\varphi'_\alpha(m_x(s))K_x(t,s). \qquad (15)$$

Нам потребуется $u = \varphi(\alpha) = \ln\alpha$. Тогда $\varphi(\alpha)'_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, и из (14) и (15) имеем

$$m_u = \ln m_x(t), \quad K_u(t,s) = \frac{K_x(t,s)}{m_x(t)m_x(s)}.$$

Возвращаясь к уравнению Риккати и используя (5), т.е. то, что

$$z(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = (\ln(x(t)))',$$

получаем среднее значение и ковариацтонную функцию решения уравнения Риккати (3):

$$m_z(t) = \frac{m'_x(t)}{m_x(t)}, \qquad K_z(t,s) \approx \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\left[\frac{K_x(t,s)}{m_x(t)m_x(s)}\right],$$

где $m_x(t)$ и $K_x(t,s)$ - соотвественно среднее и ковариационная функция решения уравнения (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

(1) Долгов Н.М. *Высшая математика.* -К.: Выща школа, 1998.

(2) Донскер М. *Об интегралах в функциональных пространствах*// Математика. -1967. -Т. 11, № 3. -С. 128-164.

(3) Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. *Уравнения Кортвега-де-Фриза - вполне интегрируемая гамильтонова система* // Функц. анализ и его приложения. -1971. -Т. 5, № 4. -С. 18-27.

(4) Зеликин М.И. *Однородные пространства и уравнения Риккати в вариационном исчислении.* -М.: Факториал, 1998.

(5) Кляцкин В.И., Татарский В.И. *Статистические средние в динамических системах* // Теор. и матем. физика. -1973. -Т. 17, № 2. -С. 273-282.

(6) Ковтун И.И. *Моментные уравнения для систем дифференциальных уравнений, возмущенных негауссовскими случайными процессами*// Виснык Киевского университета. Серия: физико-математические науки. -2002. Вып.1, № 4. -С. 186-191 (на укр. языке).

(7) Курант Р. *Интеграл Дирихле и минимальные поверхности.* -М.: ИЛ, 1953.

(8) Harnard I., Saint-Auben Y., Snider S. *Quadratic prendopotential for $GL(N,C)$ principal sigma models* // Physic. D. -1984. -V. 10, № 3. -P. 394-412.

(9) Kovtun I.I. *On the moments of a two differential equations with stochastic perrurbations* // Spectral and Evolutions Problems. -1998. Simferopol: Tavria. -P. 146-449.

(10) Kovtun I.I. *On the moments of a two differential equations with stochastic perrurbations.* II // Ученые записки Таврического нац. унив. им. В.И.Вернадского. -2003. -Т. 16(55), № 1. -С. 182-185.

(11) Winternitz P. *Lie groups and solutions of nonlineare differettial equations* // In: Lect. Notes of Phys. -1983. -V. 189. P. -263-331.

I.I.Kovtun., Math. Dept. of National Agricultural University, Geroiv Oborory str., Kyiv, 03041.
e-mail: ira@otblesk.com

МЕТОД МНОГИХ МАСШТАБОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Кордюкова С.А.
Уфимский государственный авиационный технический университет
Уфа, Россия

1. Введение

В этой работе рассматриваются уравнения движения плоских волн жидкости с вектором скорости $V = (v_1, v_2)$ в равномерном поле сил тяжести [1]:

$$\phi_{xx} + \varepsilon^{-2}\phi_{yy} = 0 \tag{1}$$

$$h_t + h_x\phi_x - \varepsilon^{-2}\phi_y = 0, \text{ при } y = h(t,x). \tag{2}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\phi_y^2 + gh = 0, \text{ при } y = h(t,x), \tag{3}$$

где $\phi(x,y,t)$ — потенциал скорости: $V = \nabla\phi$, свободная поверхность задается уравнением $h(x,t) - y = 0$, условие непротекания на дне означает $\phi_y = 0$ при $y = 0$, $\varepsilon = \frac{h_0}{\lambda} \ll 1$ — параметр, который предполагается малым, λ — длина волны. Систему уравнений (1)—(3) в дальнейшем будем называть уравнениями (или системой уравнений) мелкой воды. Обоснование теории мелкой воды было проведено Л. В. Овсянниковым в книге [1]. Основным методом исследования системы уравнений мелкой воды является метод, который исторически называют методом Лагранжа. Согласно этому методу, запишем потенциал скорости в виде ряда:

$$\phi = A(x,t) - \frac{\varepsilon^2}{2!}A_{xx}(t,x)y^2 + \frac{\varepsilon^4}{4!}A_{xxxx}(t,x)y^4 - \frac{\varepsilon^6}{6!}A_{xxxxxx}(t,x)y^6 + \ldots, \tag{4}$$

Подставим данное разложение в систему (1)—(3):

$$\begin{aligned} &h_t + h_xA_x + A_{xx}h - \frac{\varepsilon^2}{2}h^2(A_{xxx}h_x \\ &\quad + \frac{1}{3}A_{xxxx}h)z + \frac{\varepsilon^4}{4!}h^4(A_{xxxxx} + \frac{1}{5}A_{xxxxxx}h) = 0, \\ &A_t + \frac{1}{2}A_x^2 + gh - \frac{\varepsilon^2}{2}h(A_{xxt} + A_xA_{xxx} - A_{xx}^2) + \varepsilon^4h^4(\frac{1}{4!}A_{xxxxt} \\ &\quad + \frac{1}{4}A_{xxx}^2 - \frac{1}{6}A_{xx}A_{xxx}) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Предполагая, что формула (4) справедлива не только в некорой окрестности $y = 0$, но и вплоть до $y = h$, обращение формулы (4) дает:

$$A = \phi + \frac{\varepsilon^2}{2}h^2\phi_{xx} + \frac{5\varepsilon^4}{4!}h^4\phi_{xxxx} + \ldots. \tag{6}$$

Система (5) достаточно сложна ввиду ее сильной нелинейности. Для упрощения системы (5) используем приближение Буссинеска для h и ϕ [1]

$$h = h_0 + \varepsilon^2\eta, \quad \phi = -gh_0t + \varepsilon^2\psi. \tag{7}$$

Подставляя (6), (7) в (5), получим

$$\eta_t + h_0\psi_{xx} + \varepsilon^2((\psi_x\eta)_x + \frac{1}{3}h_0^3\psi_{xxxx}) + \varepsilon^4(h_0^2(\psi_{xx}\eta)_{xx} + \frac{16}{5!}h_0^5\psi_{xxxxxx}) = 0, \tag{8}$$

$$\psi_t + g\eta + \frac{\varepsilon^2}{2}\psi_x^2 + \varepsilon^4(h_0\eta_t\psi_{xx} + \frac{h_0}{2}\psi_{xx}^2) = 0. \tag{9}$$

Введем обозначение $\alpha(z,\varepsilon) = o(\varepsilon^p)$, если выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(z,\varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0.$$

Число p будем называть порядком точности выражения $\alpha(z,\varepsilon)$ по ε. Теперь, если мы выразим η из уравнения (9) и подставим в уравнение (8), мы получим так называемое приближенное уравнение Буссинеска (с точностью до четвертого порядка по ε)

$$-\frac{1}{g}\psi_{tt}+h_0\psi_{xx}+\frac{\varepsilon^2}{g}\left[\frac{1}{3}h_0^3 g\psi_{xxxx}-2\psi_x\psi_{tx}-\psi_t\psi_{xx}\right]$$
$$+\varepsilon^4\Big[\frac{-h_0^2}{g}(\psi_{40}\psi_t+2\psi_{xxx}\psi_{tx}+2\psi_{xx}\psi_{txx})-\frac{3}{2g}\psi_{xx}\psi_x^2+\frac{h_0}{g^2}(\psi_{tt}\psi_{xx})_t+\frac{2}{15}h_0^5\psi_{xxxxxx}\Big]=0. \quad (10)$$

2. Метод многих масштабов для приближенного уравнения Буссинеска

Метод многих масштабов был очень популярен в двадцатом веке. Он хорошо описан в книге Найфе [2]. Идея применения метода многих масштабов к приближенному уравнению Буссинеска возникла в [5], где авторы рассмотрели данное уравнение с точностью до первого порядка. Применение метода многих масштабов позволяет улучшить результаты, полученные в [4].

Прежде чем применить метод многих масштабов к приближенному уравнению Буссинеска, удобно сделать замену в уравнении (10):

$$X=t-\frac{x}{\sqrt{h_0 g}},\quad Y=t+\frac{x}{\sqrt{h_0 g}},\quad t=t,\quad \psi=-\frac{h_0^2}{9}u,\quad \varepsilon=\frac{6g}{h_0}\varepsilon_1.$$

В результате получается преобразованное уравнение Буссинеска:

$$\begin{aligned}u_{XY}-&\frac{1}{2}\varepsilon\Big[u_Xu_{XX}+u_Yu_{YY}-\frac{1}{3}(u_Xu_{YY}+u_Yu_{XX})\\&-\frac{2}{3}u_{XY}(u_X+u_Y)+u_{XXXX}+u_{YYYY}-4u_{XYYY}+u_{XXYY}-4u_{XXXY}\Big]\\&+\varepsilon^2\Big[2(u_{YY}-u_{XX})(u_{YYY}-u_{XXX})+(u_X+u_Y)(u_{XXXX}+u_{YYYY})\\&-\frac{1}{6}(u_X^2u_{XX}+u_Y^2u_{YY}-2u_Xu_Y(u_{XX}+u_{YY})+u_Y^2u_{XX}+u_X^2u_{YY})\\&+\frac{6}{5}(u_{XXXXXX}+u_{YYYYYY})\Big]=0.\end{aligned} \quad (11)$$

Перепишем уравнение (11) с точностью до второго порядка по ε. Для этого выразим из этого уравнения u_{XY} в первом порядке по ε:

$$u_{XY}=\frac{1}{2}\varepsilon\Big[u_Xu_{XX}+u_Yu_{YY}-\frac{1}{3}(u_Xu_{YY}+u_Yu_{XX})+u_{XXXX}+u_{YYYY}\Big]=\frac{1}{2}\varepsilon\Psi, \quad (12)$$

и подставим выражение (12) в уравнение (11):

$$\begin{aligned}u_{XY}=&\frac{1}{2}\varepsilon\Psi-\frac{1}{6}\varepsilon^2(u_X+u_Y)\Psi-\varepsilon^2\Psi_{YY}+\frac{3}{2}\varepsilon^2\Psi_{XY}-\varepsilon^2\Psi_{XX}\\&+\varepsilon^2\Big[2(u_{YY}-u_{XX})(u_{YYY}-u_{XXX})+(u_X+u_Y)(u_{XXXX}+u_{YYYY})\\&-\frac{1}{6}(u_X^2u_{XX}+u_Y^2u_{YY}-2u_Xu_Y(u_{XX}+u_{YY})+u_Y^2u_{XX}+u_X2u_{YY})\\&+\frac{6}{5}(u_{XXXXXX}+u_{YYYYYY})\Big].\end{aligned} \quad (13)$$

Введем медленные переменные по формулам:

$$\tau=\frac{1}{2}\varepsilon(X+Y),\quad T_1=\frac{1}{2}\varepsilon^2(X+Y),\quad T_2=\frac{1}{2}\varepsilon^2(X-Y).$$

Тогда производные $\frac{\partial}{\partial X}$ и $\frac{\partial}{\partial Y}$ соответственно заменятся на

$$\frac{\partial}{\partial X}+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_1}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2},$$
$$\frac{\partial}{\partial Y}+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_1}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}.$$

Уравнение (13) в медленных переменных с точностью до второго порядка примет вид:

$$
\begin{aligned}
&u_{XY} + \frac{1}{2}\varepsilon(u_{\tau X} + u_{\tau Y}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(u_{T_1X} + u_{T_1Y}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(u_{T_2X} - u_{T_2Y})\\
&\quad + \frac{1}{4}\varepsilon^2 u_{\tau\tau} = \frac{\varepsilon}{2}\Big[u_X u_{XX} + \varepsilon u_X u_{\tau X} + \frac{1}{2}\varepsilon u_\tau u_{XX} + u_Y u_{YY}\\
&\quad + \varepsilon u_Y u_{\tau Y} + \frac{1}{2}\varepsilon u_\tau u_{YY} - \frac{1}{3}(u_X u_{YY} + \varepsilon u_X u_{\tau Y} + \frac{\varepsilon}{2}u_\tau u_{YY}\\
&\quad + u_Y u_{XX} + \varepsilon u_Y u_{\tau X} + \frac{\varepsilon}{2}u_\tau u_{XX}) + u_{XXXX} + u_{YYYY} + 2\varepsilon(u_{XXXX\tau}\\
&\quad + u_{YYYY\tau})\Big] - \frac{1}{6}\varepsilon^2(u_X + u_Y)\Psi - \varepsilon^2\Psi_{YY} + \frac{3}{2}\varepsilon^2\Psi_{XY} - \varepsilon^2\Psi_{XX}\\
&\quad + \varepsilon^2\Big[2(u_{YY} - u_{XX})(u_{YYY} - u_{XXX}) + (u_X + u_Y)(u_{XXXX} + u_{YYYY})\\
&\quad - \frac{1}{6}(u_X^2 u_{XX} + u_Y^2 u_{YY} - 2u_X u_Y(u_{XX} + u_{YY}) + u_Y^2 u_{XX} + u_X^2 u_{YY})\\
&\quad + \frac{6}{5}(u_{XXXXXX} + u_{YYYYYY})\Big].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Будем искать асимптотическое решение уравнения (14) в виде ряда по степеням ε:

$$
u = u^0(X, Y, \tau, T_1, T_2) + \varepsilon u^1(X, Y, \tau, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u^2(X, Y, \tau, T_1, T_2) + o(\varepsilon^2).
$$

Подставляя это выражение в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, можно последовательно найти u^0, u^1, u^2. В формулы для u^1 и u^2 могут входить члены, содержащие множители вида εX, εY, $\varepsilon^2 X$ и $\varepsilon^2 Y$, которые в дальнейшем будут называться секулярными членами. Наличие секулярных членов вынуждает нас рассматривать асимптотическое решение в области, где $X \ll 1/\varepsilon, Y \ll 1/\varepsilon$. Чтобы расширить область пригодности асимптотического решения, необходимо приравнять секулярные члены к нулю [2]. В результате получаем следующие формулы для u^0, u^1, u^2:

$$
u^0 = a(X, \tau, T_1, T_2) + b(Y, \tau, T_1, T_2), \tag{15}
$$

$$
u^1 = -\frac{1}{6}(ab_Y + ba_X) + a_1 + b_1, \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
u^2 = &\frac{1}{4}(b_Y \int a_\tau dX + a_X \int b_\tau dY) - \frac{1}{12}(a_X^2 b/2 + b_Y^2 a/2)\\
&+ \frac{1}{9}(b_Y \int a_X^2 dX + a_X \int b_Y^2 dY) + \frac{1}{36}(b_{YY} a^2/2\\
&+ a_{XX} b^2/2 + a_X \int b b_{YY} dY + b_Y \int a a_{XX} dX) + \frac{5}{4}(a_{XXX} b + b_{YYY} a)\\
&- \frac{13}{6}(a_X b_{YY} + b_Y a_{XX}) - \frac{1}{6}\int\int(a_X b_{1YY} + b_Y a_{1XX} + b_{YY} a_{1X}\\
&+ a_{XX} b_{1Y})dXdY + a_2 + b_2,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где a_1, a_2 зависят от X, τ, T_1, T_2, и b_1, b_2 зависят от Y, τ, T_1, T_2 (здесь члены вида $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$ представляют собой общие решения линейного волнового уравнения $u_{XY} = 0$). Условие обращения секулярных членов в нуль дает систему, которую мы выпишем и рассмотрим отдельно:

$$\begin{aligned}
a_\tau &= \frac{1}{2}a_X^2 + a_{XXX} \\
\frac{1}{2}(a_{T_1} - a_{T_2} + a_{1\tau}) &= \frac{1}{6}\frac{a_X^3}{3} + 2a_X a_{XXX} + \frac{29}{12}\frac{a_{XX}^2}{2} + \frac{39}{20}a_{XXXXX} \\
&+ \frac{1}{2}(a_{1X}a_X + a_{1XXX}). \\
b_\tau &= \frac{1}{2}b_Y^2 + b_{YYY}. \\
\frac{1}{2}(b_{T_1} + b_{T_2} + b_{1\tau}) &= \frac{1}{6}\frac{b_Y^3}{3} + 2b_Y b_{YYY} + \frac{29}{12}\frac{b_{YY}^2}{2} + \frac{39}{20}b_{YYYYY} \\
&+ \frac{1}{2}(b_{1Y}b_Y + b_{1YYY}).
\end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) состоит из двух независимых систем, одна — на функции a и a_1, другая — на функции b и b_1. Легко заметить, что первая часть системы (18) является следствием следующей системы уравнений:

$$a_\tau = \frac{1}{2}a_X^2 + a_{XXX} \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}(a_{T_1} - a_{T_2}) = \frac{1}{2}\frac{a_X^3}{3} + a_X a_{XXX} + \frac{a_{XX}^2}{2} + \frac{3}{5}a_{XXXXX}. \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}a_{1\tau} = -\frac{1}{3}\frac{a_X^3}{3} + a_X a_{XXX} + \frac{17}{12}\frac{a_{XX}^2}{2} + \frac{27}{20}a_{XXXXX} + \frac{1}{2}(a_{1X}a_X + a_{1XXX}). \tag{21}$$

Аналогичная система уравнений на функции $b(Y, \tau, T_1, T_2)$ и $b_1(Y, \tau, T_1, T_2)$ с точностью до знака имеет тот же вид, что и система (19), (20), (21). Уравнения (19) и (20) являются потенцированными уравнениями КдФ-3 и КдФ-5 соответственно. Известно, что система, состоящая из уравнений КдФ-3 и КдФ-5, совместна. Для нее построены различные классы решений, в частности, N-солитонные решения [3]. Например, односолитонное решение a имеет вид:

$$a = 2k \tanh\left[k\left(\frac{X}{6} + \frac{\tau}{54}k^2 + \frac{T_1 - T_2}{810}k^4\right)\right].$$

Для данной функции a соответствующая функция a_1 удовлетворяет линейному уравнению в частных производных:

$$a_{1\tau} = a_{1XXX} + 2k\frac{a_{1X}}{(\cosh z)^2} + c_1(\tanh z)^2 + c_2(\tanh z)^4 + c_3(\tanh z)^6, \tag{22}$$

где $z = k(\frac{X}{6} + \frac{\tau}{54}k^2 + \frac{T_1 - T_2}{810}k^4)$, c_1, c_2, c_3 — некоторые константы. Это уравнение разрешимо согласно теореме Коши-Ковалевской.

Напомним, что уравнение (11) было получено из уравнения мелкой воды с точностью до второго порядка по ε. Нетрудно показать, что всю эту процедуру можно проделать с приближенным уравнением Буссинеска, рассматриваемым с точностью до любого порядка по ε:

$$u_{XY} = \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon^n\alpha_n, \tag{23}$$

где $\alpha_i, i = 1\ldots, n$ — функции, зависящие от $u_X, u_Y, u_{XX}, u_{YY}\ldots$. Применяя метод многих масштабов к этому уравнению, получим:

$$\begin{aligned}
u = a(X, \tau, T_1, T_2 \ldots + T_{2n-2}) + b(Y, \tau, T_1, T_2 \ldots + T_{2n-2}) \\
- \frac{1}{6}\varepsilon(a_X b + a b_Y) + \varepsilon(a_1 + b_1) + \varepsilon^2(u^2 + a_2 + b_2) + \ldots + \varepsilon^n(u^n + a_n + b_n),
\end{aligned}$$

где:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{2}(X + Y), \quad T_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2(X + Y), \quad T_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2(X - Y), \ldots,$$

$$T_{2n-3} = \frac{1}{2}\varepsilon^n(X+Y), \quad T_{2n-2} = \frac{1}{2}\varepsilon^n(X-Y),$$

функции $a(X, \tau, T_1, T_2, \ldots, T_{2n-2})$ и $b(Y, \tau, T_1, T_2, \ldots, T_{2n-2})$ удовлетворяют системе, состоящей из уравнений КдФ-3, ..., КдФ-(2n+1), и $u^i, i = 2, 3, \ldots, n$, могут быть найдены рекурентно. В каждом порядке по ε возникают дополнительные неизвестные функции, которые находятся из линейных уравнений в частных производных:

$$a_{n\tau} = a_{n-1X}a_{nX} + a_{nXXX} + \psi(a, a_1, \ldots a_{n-1}),$$

где ψ — аналитическая функция своих аргументов. Разрешимость этих уравнений следует, например, из теоремы Коши-Ковалевской.

В заключение можно отметить, что метод многих масштабов для уравнений мелкой воды, преобразованных в приближенное уравнение Буссинеска, дает новое асимптотическое решение, которое в нулевом порядке точности представляется в виде суммы функций, удовлетворяющих совместной системе уравнений, состоящей из уравнений КдФ-3, ..., КдФ-(2n+1). Метод многих масштабов можно комбинировать с приближенным групповым анализом, что будет рассмотрено автором в дальнейшем.

Список литературы

[1] *Овсянников Л. В.* Лагранжевы приближения в теории волн. Новосибирск, Наука, 10-78,1985.

[2] *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 228-308, 1973.

[3] *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. and Miura, R.M.* Method for solving the Korteveg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett., 19 1095-1097, 1967.

[4] *Baikov V. A., Kordyukova, S. A.* Approximate symmetries of the Boussinesq equation. *Quaest. Math.* 26, 1–14, 2003.

[5] *Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Метод многих масштабов в приближенном групповом анализе: уравнение Буссинеска и Кортевега-де Фриза. Всес. Центр Матем. Модел. АН СССР, 3-24, 1991.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Корнев[1]
Саратовский государственный университет
Саратов, Россия

В статье устанавливается аналог теоремы Саса об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье для разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях.

В настоящей статье устанавливается аналог теоремы Саса [1, с.609] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье для разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt + \alpha \int\limits_0^{x} A(x,t)f(t)dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где функция $A(x,t)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0 \le t \le x \le 1$, причем

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} A(x,t)|_{t=x} = \delta_{s,n-1} \quad (s=0,\ldots,n),$$

$\delta_{s,n-1}$ – символ Кронекера, α – произвольное число, такое, что $\alpha^2 \ne 1$.

Оператор (1) впервые рассматривался в [2]. Он представляет собой простейший вид интегрального оператора, ядро которого имеет разрывы $(n-1)$-ой производной на линиях $t=x$ и $t=1-x$. Для такого оператора в [3] установлена равносходимость разложений по с.п.ф. и по обычной тригонометрической системе. При $\alpha=0$ для таких разложений в [4] доказан аналог теоремы Зигмунда [1, с.614] об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Обозначим через A_0 оператор вида (1) при $A_0(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, а через $R_{0,\lambda} = (E-$ $-\lambda A_0)^{-1}A_0$ его резольвенту Фредгольма (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Для определенности считаем, что n четное. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$v^{(n)}(x) - \lambda \mathcal{D} v(x) = BF(x), \tag{2}$$

$$Pv^{(j)}(0) + Qv^j(1) = 0, \quad (j=0,\ldots,n-1), \tag{3}$$

где $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha+1 \\ \alpha-1 & 1-\alpha \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d_1 =$ $= \alpha+1$, $d_2 = \alpha - 1$, $p_1 = 1-\alpha$, $p_2 = -\alpha-1$, $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, т – знак транспонирования.

Как показано в [3], если однородная задача, соответствующая задаче (2)-(3), имеет только нулевое решение, то $R_{0,\lambda}$ существует и

$$R_{0,\lambda} f(x) = v_1(x) + v_2(x).$$

Для упрощения записи перейдем от параметра λ к $\mu = (\alpha+1)\lambda$ и μ снова обозначим через λ. Матрица $\mathcal{D}$ примет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, где $d_2 = (\alpha-1)/(\alpha+1)$. Положим $\lambda = \rho^n$ $(0 \le \arg\rho \le 2\pi/n$, $\omega_j = \exp(2\pi i(j-1)/n)$ $(j=1,\ldots,n)$, $d = |d_2|^{1/n}\exp(i\arg d_2/n)$, $0 \le \arg d_2 < 2\pi$. Разобьем сектор $0 \le \arg\rho \le 2\pi/n$ на секторы $\varphi_{s-1} \le \arg\rho \le \varphi_s$ $(s=1,\ldots,m; 0=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_m = 2\pi/n)$ таким образом, чтобы каждый сектор обладал следующим свойством: числа $\omega_1,\ldots,\omega_n$, $d\omega_1,\ldots,d\omega_n$ можно перенумеровать в таком порядке $\tilde\omega_1,\tilde\omega_2,\ldots,\tilde\omega_{2n}$, что при любом ρ из рассматриваемого сектора выполняются неравенства: $Re\,\rho\tilde\omega_j \ge 0$ $(j=1,\ldots,n)$, $Re\,\rho\tilde\omega_j \le 0$ $(j=n+1,\ldots,2n)$, причем на одной из границ сектора $Re\,\rho\tilde\omega_n = Re\,\rho\tilde\omega_{n+1} = 0$, а в случае $\arg d_2 = 0$ на этой же границе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), гранта РФФИ (проект 03-01-00169) и программы "Университеты России"(проект ур.04.01.375).

$Re\,\rho\tilde{\omega}_{n-1} = Re\,\rho\tilde{\omega}_{n+2} = 0$. Нетрудно видеть, что $m = 4$ в случае $\arg d_2 > 0$ и $m = 2$ в случае $\arg d_2 = 0$.

Для определенности рассмотрим сектор $S = \{\rho | 0 \le \arg\rho \le \varphi_1\}$ (другие секторы рассматриваются аналогично). В [3] получена следующая асимптотическая формула для характеристического определителя $\Delta(\rho)$ краевой задачи (2)-(3):

$$\Delta(\rho) = (1-\alpha^2)\rho^{n(n-1)}[\varphi(\rho) + o(1)]\exp\left(\rho\sum_{1}^{n}\tilde{\omega}_j\right),$$

где $\varphi(\rho) = a_0 + a_1\exp(-2\rho\tilde{\omega}_n) + a_2\exp(-\rho(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{n+1})) + a_3\exp(-2\rho\tilde{\omega}_{n-1}) + a_4\exp(-2\rho(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{n-1}))$, причем $a_0 \ne 0$.

Удалим из S все нули квазиполинома $\varphi(\rho)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ и получившуюся область обозначим S_δ. Введем также обозначения:

$$\sigma(x,\rho) = \exp\rho\tilde{\omega}_j(x-1), \text{ если } j = 1,\dots,n;$$
$$\sigma(x,\rho) = \exp\rho\tilde{\omega}_j x, \text{ если } j = n+1,\dots,2n;$$
$$g_1(x,t,\rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\gamma_{1,j}\varepsilon(x,t) + \gamma_{2,j}\varepsilon(t,x)\right)\exp\rho\omega_j(x-t);$$
$$g_2(x,t,\rho) = \frac{d}{n\rho^{n-1}d_2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\tilde{\gamma}_{1,j}\varepsilon(x,t) + \tilde{\gamma}_{2,j}\varepsilon(t,x)\right)\exp\rho d\omega_j(x-t),$$

где $\varepsilon(t,x) = 1$ при $t \le x$,$\varepsilon(t,x) = 0$ при $t > x$; $\gamma_{1,j} = 1, \gamma_{2,j} = 0$, если $Re\,\rho\omega_j \le 0$; $\gamma_{1,j} = 0$, $\gamma_{2,j} = -1$, если $Re\,\rho\omega_j \ge 0$; $\tilde{\gamma}_{1,j} = 1$, $\tilde{\gamma}_{2,j} = 0$, если $Re\,\rho d\omega_j \le 0$; $\tilde{\gamma}_{1,j} = 0$, $\tilde{\gamma}_{2,j} = -1$, если $Re\,\rho d\omega_j \ge 0$; $d = |d_2|^{1/n}\exp(i\arg d_2/n)$.

Теорема 1. *В области S_δ при достаточно больших $|\rho|$ для решения краевой задачи (2)-(3) имеет место представление*

$$v(x,\rho) = \int_0^1 G(x,t,\rho)BF(t)\,dt,$$

где $G(x,t,\rho) = \begin{pmatrix} g_1(x,t,\rho) & 0 \\ 0 & g_1(x,t,\rho)\end{pmatrix} + \rho^{1-n}H(x,t,\rho)$, $H(x,t,\rho)$ *- матрица, элементы которой являются линейными комбинациями всевозможных произведений* $\sigma(x,\rho)\sigma(t,\rho)$ *с коэффициентами, которые не зависят от x и t и ограничены по ρ.*

В основе сравнения ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A и ее ряда Фурье по с.п.ф. оператора A_0 лежит следующая

Теорема 2. *В области S_δ при больших $|\rho|$*

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} + R_{0,\lambda}T_\lambda D^{n-1}SR_{0,\lambda},$$

где T_λ - интегральный оператор, ядро которого ограничено по ρ, $D = \frac{d}{dx}$, $Sf = f(1-x)$.

В λ-плоскости можно построить последовательность простых замкнутых контуров Γ_k, прообразы которых в ρ-плоскости лежат в S_δ и содержат внутри себя нули квазиполинома $\varphi(\rho)$, причем каждый такой ноль попадает в один и только один прообраз, а число этих нулей внутри каждого прообраза ограничено сверху константой N_0.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

а) $f(0) = f(1) = 0$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(2)}(f,\frac{1}{n}) < \infty$, *где* $\omega^{(2)}(f,\frac{1}{n})$ *– квадратический модуль непрерывности $f(x)$ при ее периодическом продолжении;*

в) либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\int\limits_0^{1/n}|f(x)|^2\,dx} < \infty$, *либо* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\int\limits_0^{1/n}|f(1-x)|^2\,dx} < \infty$.

Тогда существует натуральное k_0 такое, что

$$\sum_{k\geq k_0}\max_{0\leq x\leq 1}\left|\int\limits_{\Gamma_k}(R_\lambda - R_{0,\lambda})f\,d\lambda\right| < \infty.$$

Сравнение ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A_0 с ее тригонометрическим рядом Фурье приводит к следующей теореме:

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям а)-в). Тогда*

$$\sum_{k\geq k_0}\max_{0\leq x\leq 1}\left|\int\limits_{\Gamma_k}R_{0,\lambda}f\,d\lambda\right| < \infty.$$

Из теорем 3, 4 следует основной результат:

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям а)-в) из теоремы 3, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ - ее ряд Фурье по с.п.ф. оператора A. Тогда существует натуральное N, натуральные числа $1 \leq N_k \leq N$, такие, что*

$$\sum_{k\geq k_0}\max_{0\leq x\leq 1}\left|\sum_{j=1}^{N_{k+1}}\varphi_{n_k+j}(x)\right| < \infty,$$

где $n_k = N_{k_0} + \ldots + N_k$.

Замечание. При некоторых значениях α, например, при $\alpha = 0$, можно утверждать, что все $N_k = 1$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{0\leq x\leq 1}|\varphi_n(x)| < \infty,$$

Этот результат усиливает теорему, полученную в [5].

Список литературы

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз. – 1961. – 936 с.

[2] *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях// Матем.заметки – 1998. – Т.64 – No 6 – С. 932-949.

[3] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Матем.сб. – 2001. – Т.192 – No 10 – С. 33-50.

[4] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Абсолютная сходимость разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Изв. РАН. Сер. Математическая. – 2005. – Т.69 – No. 4. – С. 59-74.

[5] *Корнев В. В.* Об абсолютной сходимости разложений по собственным функциям одного класса интегральных операторов// Spectral and evolution problems: Proceedings of the 15-th Crimean Autumn Mathematical School-Simposium. – Simferopol: Tavrida National University. – 2005. – V.15 – P.43-46.

Kornev V.V. On absolute uniform convergence of the expansions in eigenfunctions of integral operators

The paper gives an analogue of Szasz theorem about absolute convergence of trigonometric Fourier series for the expansions in eigenfunctions of integral operators which kernels have jumps of their derivatives on the diagonals.

Keywords: integral operators, eigenfunctions, expansions, absolute convergence.

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ВЕРХНИМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Кувардина Л.П.
Саратовский государственный университет,
Саратов, Россия

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{p(x)} A(p(x),t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $p(x) = \dfrac{1-x}{ax+1}$, $a > -1$. Предполагается, что функции $A(x,t)$, $A_x(x,t)$, $A_t(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$,

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{0,j} \qquad (j = 0,\ 1), \tag{2}$$

$\delta_{i,j}$ - символ Кронекера. Простейшим оператором вида (1) является оператор

$$A_0 f(x) = \int\limits_0^{p(x)} f(t)\,dt. \tag{3}$$

Ранее операторы вида (1) в случае $p(x) = 1 - x$ были рассмотрены А.П.Хромовым. В частности, получены формулы точного обращения оператора, показана равносходимость разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора (1) при $p(x) = 1 - x$ и в обычный тригонометрический ряд Фурье, например, в [1].

В данной статье показана равносходимость разложений интегрируемой функции по собственным и присоединенным функциям оператора A и "простейшего"оператора A_0.

Обозначим через $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ и $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1}A_0$ резольветы Фредгольма операторов (1) и (3), соответственно. Выбор оператора позволил свести интегро-дифференциальное уравнение для резольвенты R_λ^0 к краевой задаче в пространстве двумерных вектор–функций для дифференциальной системы первого порядка с переменными коэффициентами, а именно,

$$z'(x) = \lambda B(x)z(x) + B(x)F(x), \tag{4}$$

$$Q_0 z(0) + Q_1 z(1) = 0, \tag{5}$$

где $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & p'(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $F(x) = (f(x), f(p(x)))^T$.

Теорема 1. *Если λ таково, что R_λ^0 существует, то вектор $z(x)$ с координатами $z_1(x) = R_\lambda^0 f(x)$, $z_2(x) = z_1(p(x))$ является решением задачи* (4), (5). *Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет* (4), (5), *и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то R_λ^0 существует и $R_\lambda^0 f(x) = z_1(x)$, $z_2(x) = z_1(p(x))$.*

По решению краевой задачи (4), (5) определяем явный вид резольвенты R_λ^0. Для удобства изложения от спектрального параметра λ перейдем к параметру

$$\mu = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - 4\lambda^2(a+1)}}{a}\right).$$

Теорема 2. *Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то резольвента R_λ^0 оператора A_0 существует, и справедливо представление*

$$R_\lambda^0 f = \frac{1}{s(1,\mu)}\left(\frac{\lambda}{a}\ r(p(x))q_2(x,\lambda;f) - s(x,\mu)q_1(x,\lambda;f)\right), \tag{6}$$

где

$$r(x,\mu) = (ax+1)^{\mu+1} - (ax+1)^{-\mu},$$
$$s(x,\mu) = (\mu+1)(ax+1)^{\mu} + \mu(ax+1)^{-(\mu+1)},$$
$$q_1(x,\lambda;f) = -\int\limits_0^{p(x)} \frac{1}{2\mu+1} s(t,\mu) f(t)\,dt - \int\limits_x^1 \frac{\lambda}{a(2\mu+1)}\; r(p(t),\mu) f(t)\,dt,$$
$$q_2(x,\lambda;f) = \int\limits_0^{x} \frac{1}{2\mu+1} s(t,\mu) f(t)\,dt - \int\limits_{p(x)}^1 \frac{a\mu(\mu+1)}{\lambda(a+1)(2\mu+1)}\; r(p(t),\mu) f(t)\,dt.$$

Зная явный вид (6) резольвенты R_λ^0, получаем ряд оценок R_λ^0 в различных пространствах при $|\lambda| \to \infty$. Приведем эти оценки для случая $a > 0$, в области S_δ, получающейся из полуплоскости $Re\mu \le 0$ удалением δ-окрестности точек $\mu_k = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi i}{2\,ln(a+1)} + \dfrac{k\pi i}{ln(a+1)}$.

Лемма 1. *В области S_δ, при $Re\mu \neq -1$ имеют место оценки:*

$$\|R_\lambda^0 f\|_\infty = O(\|f\|_{L_1}),$$
$$\|R_\lambda^0 f\|_{C[\varepsilon,\,p(\varepsilon)]} = O(\Psi(\mu,\varepsilon)\;\|f\|_\infty),$$
$$\|R_\lambda^0 f\|_{L_1} = O\left(\Psi(\mu,0)\;\|f\|_{L_1}\right),$$
$$\|R_\lambda^0 \chi\|_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $\Psi(\mu,\varepsilon) = æ(Re\mu-1,\varepsilon) + æ(Re\mu+1,\varepsilon)$, $æ(\xi,\varepsilon) = \frac{1}{\xi}\left(\left(\frac{a+1}{a\varepsilon+1}\right)^{\xi} - 1\right)$, $\chi(x)$ *– характеристическая функция отрезка* $[\eta_0,\eta_1] \subset (0,1)$.

Получено уравнение, связывающее резольвенты операторов A и A_0.

Теорема 3. *Если λ таково, что резольвента $R_\lambda f$ существует, то имеет место представление*

$$R_\lambda f = (E - R_\lambda^0 N_2 S)^{-1} R_\lambda^0 f,$$

где $Sf(x) = f(p(x))$, $N_2 f(x) = \int\limits_0^x N_2(x,t) f(t) dt$, $N_2(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t} N_1(x,t)$, $N_1(x,t)$ *– ядро оператора* $N_1 = (E+N)^{-1} - E$, $Nf(x) = \int\limits_0^x A_x(x,t) f(x)\,dt$.

В заключение, оценивается разность резольвент операторов

Лемма 2. *В области S_δ, при $Re\mu \neq -1$ имеет место оценка*

$$\|R_\lambda\, f - R_\lambda^0\, f\|_{C[\varepsilon,\,p(\varepsilon)]} = O(\Psi(\mu,\varepsilon)\;\Psi(\mu,0))\|f\|_{L_1}.$$

Все приведенные оценки получены для случая $Re\mu \le 0$ (в области S_δ). Аналогичные оценки имеют место и для случая $Re\mu \ge 0$ в соответствующей области S_δ. Не меняя обозначений, будем считать S_δ объединением двух областей.

Теорема 4. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_r f\|_{C[\varepsilon,\,p(\varepsilon)]} = 0,$$

где

$$\Omega_r f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} \left(R_\lambda - R_\lambda^0\right) f(x)\,d\lambda,$$

и r таково, что соответствующие μ находятся в S_δ.

Поскольку $\Omega_r f$ равно разности частичных сумм разложений по собственным и присоединенным функциям операторов A и A_0 для характеристических значений, попадающих в круг $\lambda < r$, то теорема 4 устанавливает равносходимость спектральных разложений.

Список литературы

[1] *Хромов А.П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255-266.

ПЛОСКИЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

А.Н. Марковский, В.Г. Лежнев
Кубанский Государственный Университет
Краснодар, Россия

Представлена методика построения плоскопараллельных вихревых течений в ограниченных областях. Предлагается сходящийся алгоритм. Для трубки типа Вентури получено распределение скоростей.

Задачи о вихревом течении в сложных каналах (руслах) встречаются и исследуются во многих технических и медицинских системах. В статье задача вихревого течения в области решается моделированием функции тока и построением алгоритмов для соответствующих обратных задач логарифмического потенциала.

1. Рассмотрим течение $\bar{w}(x)$ несжимаемой жидкости в ограниченной области D. Поле скоростей течения $\bar{w}(x)$ должно удовлетворять следующим условиям a) – b):

a) $\operatorname{div} \bar{w}(x) = 0$, $x \in D$;

b) на S заданы граничные условия ($S = \partial D$).

Из условия a) следует, что существует функция тока $\Psi(x)$, такая что $\bar{w}(x) = \{\Psi_{x_2}, -\Psi_{x_1}\}$. Условие b) запишется в виде

$$\Psi(x) = f(x), \quad x \in S. \tag{1}$$

2. Функция тока может быть представлена в виде

$$\Psi(x) = u_0 x_2 - v_0 x_1 + \iint\limits_D g(y) E(x-y)\, dy, \quad x \in D, \tag{2}$$

где $E(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, функция $g(y)$ описывает плотность распределения вихрей в области течения D. Функцию $g(y)$ требуется определить так, чтобы выполнялось граничное условие (1).

Можно показать, что плотность вихрей $g(y)$, обеспечивающая выполнение заданных граничных условий (1) на S для функции тока $\Psi(x)$, определяющая минимум среднеквадратической завихренности

$$J = \iint\limits_D g^2(y)\, dy,$$

является гармонической функцией.

Теорема. Для функции $f(x) \in L_2(S)$ решение задачи (1)–(2) существует и единственно, где $g(y)$ — из подпространства гармонических функций $G(D) \subset L_2(D)$ и потенциал Робена для области D не равен нулю.

3. Аппроксимацию $g^M(y)$ плотности $g(y)$ будем определять в виде линейной комбинации

$$g^M(y) = \sum_{m=1}^{M} c_m \gamma_m(y), \quad x \in D, \qquad\qquad \gamma_m(y) = E(x^m - y), \quad x \in D,$$

где последовательность $\{x^m\}_{m=1}^M$, является базисной [3]. Справедливо следующее утверждение [3].

Лемма 1. Система функций $\{\gamma_m(y)\}_{m=1}^\infty$ полна и линейно независима в $G(D)$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\mu_m(x) = \iint\limits_D \gamma_m(y) E(x-y)\, dy, \quad m = 1, \ldots, M, \quad x \in S,$$

для которой справедливо аналогичное утверждение.

Лемма 2. Система функций $\{\mu_m(x)\}_{m=1}^\infty$ полна и линейно независима в $L_2(S)$.

4. Алгоритм приближенного решения состоит в следующем. Для приближения функции тока положим

$$\Psi^M(x) = ax_2 + \sum_{m=1}^{M} c_m \mu_m(x), \quad x \in S.$$

Коэффициенты c_m определяются по граничным условиям посредством решения следующей задачи минимизации для функционала $F(c)$

$$F(c) = \left\| \Psi|_{\partial D} - ax_2 - \sum_{m=1}^{M} c_m \mu_m(x) \right\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(S)$.

Задача V: найти

$$\eta = \inf_c F(c)$$

и минимизирующие коэффициенты $c^0 = (c_1, c_2, \ldots, c_M)$.

Необходимое условие экстремума приводит к линейной системе с матрицей Грама для линейно независимой системы функций.

5. Плоский вихрь. Рассмотрим функцию $\Psi_0(x)$,

$$\Psi_0(x) = \iint\limits_D g_0(y) E(x-y)\, dy, \quad x \in D, \tag{3}$$

удовлетворяющую граничному условию

$$\Psi_0|_{\partial D} = b_0, \tag{4}$$

где $b_0 = \text{const}$. Функцию $\Psi_0(x)$ можно понимать как функцию тока плоского вихря в области D. Алгоритм определения функции $\Psi_0(x)$ полностью идентичен приведенному выше алгоритму для функции $\Psi(x)$.

6. Течение с минимальной завихренностью. Представим функцию тока в следующем виде

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + C\Psi_0(x), \quad x \in D, \tag{5}$$

где $\Psi_1(x)$ — является решением задачи (1)–(2), а функция $\Psi_0(x)$ — решением задачи (3)–(4).

Константу C определяем из вариационной задачи минимизации функционала

$$J(C) = \iint\limits_D \left[g_1(y) + Cg_0(y)\right]^2\, dy.$$

Нетрудно видеть, что

$$C = -\left(\iint\limits_D g_1(y) g_0(y) dy\right) \cdot \left(\iint\limits_D g_0^2(y) dy\right)^{-1}.$$

7. Численный эксперимент. Рассмотрим канал D, ограниченный снизу и сверху кривыми S_1 и S_2, которые зададим в параметрической форме следующим образом:

$$S_1 = \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = e^{-t^2} - 2, \end{cases} \quad S_2 = \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 2 - e^{-t^2}, \end{cases} \quad t \in [-3, 3],$$

и соединяющими их вертикальными отрезками l_1 и l_2. Область, ограниченная кривыми S_1, S_2, l_1 и l_2 определяет трубку типа Вентури [2]. Трубки такого вида используются в различных прецизионных технических устройствах, и важно знать распределение скоростей в них [4].

Функцию тока $\Psi(x)$ течения $\bar{w}(x)$ будем представлять в виде (5). Зададим следующие граничные условия: условия непротекания —

$$\Psi|_{S_1} = -1, \quad \Psi|_{S_2} = 1,$$

и условие на входе и выходе при $x_1 = \pm 3$ —

$$\Psi|_{l_1} = \frac{1}{2} x_2, \quad \Psi|_{l_2} = \frac{1}{2} x_2;$$

функции, задающие условия входа-выхода, соответствуют линейному профилю скоростей на входе и выходе. Решение задачи с указанными граничными условиями определяет вихревое течение в трубке, границы S_1 и S_2 являются линиями тока.

Ниже на рис. 1 и рис. 2 представлены линии уровня функций тока $\Psi_0(x)$ и $\Psi(x)$ соответственно.

Отметим, что рис. 2 иллюстрирует специальное распределение скоростей в трубке типа Вентури. Равномерное распределение линий тока на входе-выходе определяют постоянство модуля скорости на l_1 и l_2, то есть определяются заданными граничными условиями.

Список литературы

[1] *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.

[2] *Кирякин В. Ю.* Моделирование вихревых течений жидкости в близи твердых поверхностей. Канд. дис... Военный авиационный технический университет. М. 1999.

[3] *Лежнев В. Г., Данилов Е. А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар. КубГУ, 2000.

[4] Энциклопедический словарь. "Физика".

А.Н. Марковский, В.Г. Лежнев. Факультет прикладной математики

Кубанский Государственный Университет, Россия, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская 149

А.Н. Марковский, e-mail: lelikss78@rambler.ru

В.Г. Лежнев, e-mail: lzhnv@mail.kubsu.ru

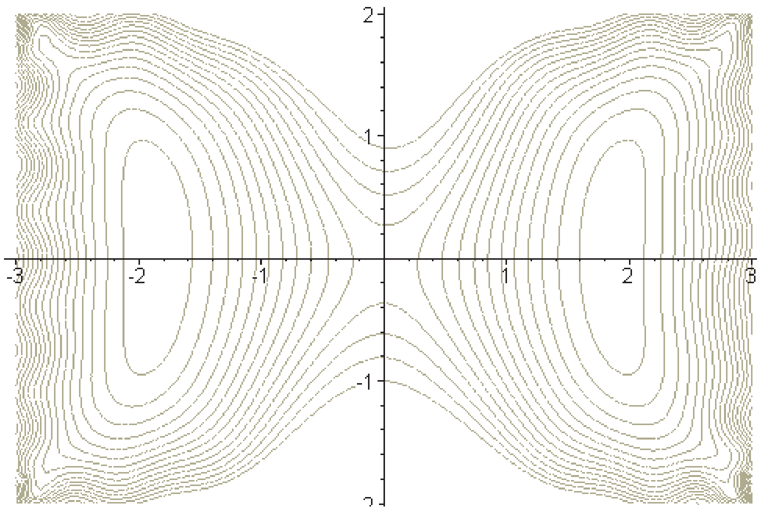

Рис. 1. Линии тока плоского вихря (линии уровня функции $\Psi_0(x)$)

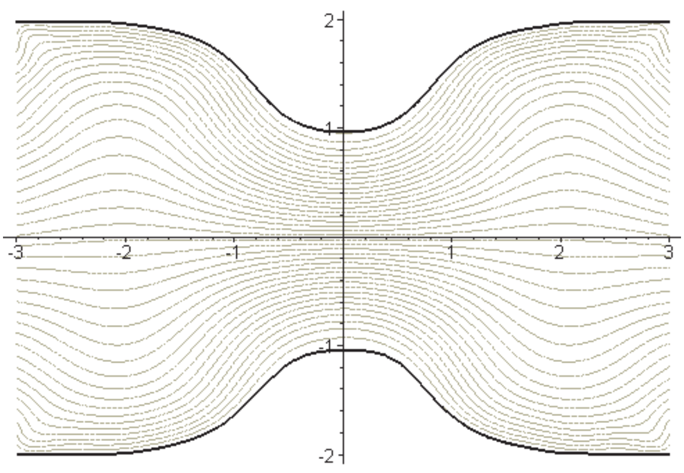

Рис. 2. Линии тока в трубке типа Вентури (линии уровня функции $\Psi(x)$)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ УТОЧНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО КОНУСУ РЕШЕНИЯ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

Матвеев В.А.
Псковский государственный педагогический университет,
Псков, Россия

В статье рассматривается многокритериальная задача. Часто её решением считают оптимальный по Парето исход. Но таких решений как правило много. Возникпет проблема его уточнения. На основании отношения предпочтения по конусу в критериальном пространстве определяется оптимальное по конусу решение, для которого паретовский исход является частным случаем. С помощью последовательности конусов строится уточнённое по конусу оптимальное (максимальное) решение многокритериальной задачи. Устанавливаются условия существования такого решения. Приводится модельный пример.

1. Оптимальное по конусу решение многокритериальной задачи

Рассматривается многокритериальная задача

$$\langle X, f(x)\rangle. \tag{1}$$

Здесь задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$ и выделен конечный набор желаемых свойств или критериев. Используем терминологию и обозначения из [1, 2]. Обычно информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию выигрыша $f : X \to R^m, m \geq 1$. Значения этой функции каждому исходу ставят в соответствие количественную оценку для выделенных свойств $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Не уменьшая общности, считаем, что критерии $f_i(x), i = 1, ..., m$, являются позитивными. Тогда, на содержательном уровне, цель в многокритериальной задаче(1) состоит в выборе такого исхода, что доставляет возможно большие значения одновременно всем компонентам векторной функции выигрыша $f(x)$.
Достаточно общий подход к определению решения в (1) предлагает отношение предпочтения по конусу в критериальном пространстве $R^m, m \geq 1$. Для сравнения векторных исходов рассматривается отношение предпочтения по конусу. Будем рассматривать выпуклый, заострённый, выступающий, пространственный конус K [3, с. 1075]. Конус K порождает в векторном критериальном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geq_k$ по правилу

$$f \geq_k g \Leftrightarrow f - g \in K. \tag{2}$$

Такой конус K называют конусом доминирования в $R^m, m \geq 1$.
Часто конусом доминирования является многогранный конус

$$K = \{f \in R^m | Af \geq 0_m\}. \tag{3}$$

Здесь представлена система m однородных неравенств и 0_m - нулевой вектор в R^m. ЗафиксированаA - квадратная матрица порядка m. Будем считать, что матрица $A = (a_{ij}), i, j = 1, ..., m$ является неотрицательной, т.е $a_{ij} \geq 0$. Кроме того, полагаем, что матрица A является невырожденной.Важным примером многогранного конуса является

$$R^m_{\geq} = \{x \in R^m | Ex \geq 0_m\} = \{x \in R^m | x_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\}, \tag{4}$$

определяемый единичной матрицей . Использование векторной упорядоченности (2) позволяет определить в задаче (1) исходы, оптимальные по конусу K.

Определение 1. Исход $x^* \in X$ называется оптимальным по конусу K в задаче векторной оптимизации (1), если $\forall x \in X, x \neq x^*, x - x^* \notin K$. Если для конуса выполнено включение $R^m_{\geq} \subset K$, то оптимальное решение $x^* \in X$ будем называть максимальным по конусу K.

Определение оптимального по конусу решения является достаточно общим. Оно включает в себя, как частный случай, Парето - оптимальные решение. Действительно, такое решение получается в определении 1, если в качестве конуса доминирования использовать конус $R^m_{\geq}$ из (4).

Теорема 1. *Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f : X \to R^m$ непрерывна, конус доминирования является выпуклым, заострённым, выступающим в R^m. Тогда в (1) существует исход, оптимальный по конусу K.*

Доказательство следует из существования гиперплоскости в R^m, разделяющей компактное множество X и соответствующий конус K.

Теорема 2. *Рассматривается многокритериальная задача (1) и конусы доминирования K_1, K_2. Пусть $X_1^* \subset X$, $X_2^* \subset X$ множества исходов, оптимальных по конусу K_1, K_2 соответственно. Тогда из $K_1 \subset K_2$ следует включение $X_2^* \subset X_1^*$.*

Действительно, пусть $x^* \in X_2^*$. Тогда, согласно определения 1, $\forall x \neq x^*, x - x^* \notin K_2$. По условию $K_1 \subset K_2$, значит $x - x^* \notin K_1$. Последнее означает, что $x^* \in X_1^*$. Следовательно $X_2^* \subset X_1^*$, что и требовалось доказать.
Теорему 1 можно применить к многогранным конусам из (3). Тогда получаем

Теорема 3. *Рассматривается многокритериальная задача (1) и многогранный конус доминирования $K = \{x \in R^m | Ax \geq 0_m\}$с неотрицательной матрицей A (3). Тогда оптимальный по конусу исход являются оптимальным по Парето.*

Таким образом, оптимальность по конусу является уточнением оптимального по Парето решения. Такой подход позволяет сократить множество претендентов на оптимальный исход. В тоже время предпочтение по конусу порождает определённые вопросы, связанные с наилучшим решением задачи (1). Во-первых, какие свойства, какой содержательный смысл имеют оптимальные по конусу решения, чем они выделяются среди паретовских решений. Во - вторых, каким образом выбирать конус доминирования, ведь таких конусов бесконечно много. В - третьих, как уточнять оптимальное по конусу решение, если таких решений достаточно много.
Рассмотрим конус доминирования, представленный многогранным конусом (3) с неотрицательной невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, m$. Не уменьшая общности можно считать, что матрица A является стохастической [5, с. 381]. У такой матрицы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, i = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Произвольную неотрицательную невырожденную матрицу можно привести к условию (5), вынося из каждой строки соответствующий множитель. Хотя матрица при таком преобразовании изменится, но конусы доминирования для исходной и преобразованной матриц будут совпадать.
Рассмотрим произвольную i- ую строку стохастической матрицы A

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}), \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, a_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m.$$

При определении оптимальности по конусу элементы этой строки умножаются соответственно на значения критериев, представленные в векторной функции выигрыша и складываются. Каждая строка матрицы A даёт новый i-ый критерий F_i. При этом элемент$0 \leq a_{ij} \leq 1$ этой строки является "весовым коэффициентом", т.е. множителем или весом с которым исходный критерий $f_i(x)$ входит в новый критерий $F_i(x)$

$$F_i(x) = a_{i1} f_1(x) + a_{i2} f_2(x) + \cdots + a_{im} f_m(x).$$

Если j-ый элемент в i-ой строке матрицы равен нулю, т.е., $a_{ij} = 0$, то новый критерий F_i не зависит от этого первоначального критерия $f_j(x)$.
Каждая строка стохастической матрицы A определяет новый критерий. В этом критерии учитывается отношение к принимаемому решению. В тоже время совокупность строк матрицы A представляет неопределённость относительно общей итоговой цели. Строки матрицы можно представлять, как мнения нескольких экспертов относительно итоговой цели. Эксперты по разному видят конечную цель, поэтому строки матрицы линейно независимы (матрица является невырожденной). В тоже время мнение экспертов является важной информацией и позволяет сократить множество претендентов на наилучшее решение.

2. Уточнение оптимального по конусу решения

Оптимальность по конусу позволяет уточнить оптимальное по Парето решение в многокритериальной задаче (1). Если рассматривать многогранный конус, определённый неотрицательной матрицей, то соответствующие оптимальные решения, согласно теореме 3, являются оптимальными по Парето. Использование такого многогранного конуса позволяет уточнить паретовские решения. При этом выбор конуса можно осуществлять целенаправлено, выделяя лучшие решения и исключая из рассмотрения заведомо неприемлемые. Действительно строки матрицы, определяющие многогранный конус, задают весовые коэффициенты для исходных критериев. Оптимальность по конусу выделяет из оптимальных по Парето решений лучшие относительно этих новых критериев.

Этот подход позволяет существенно сузить множество оптимальных по Парето решений. Но это не снимает проблему уточнения. Оптимальных по конусу решений может быть достаточно много. Тогда уточнение по конусу можно применить несколько раз, последовательно уточняя (улучшая) решение. Рассмотрим следующую последовательность уточнений.

Пусть

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, \qquad i \in N \tag{6}$$

последовательность неотрицательных, невырожденных, квадратных, стохастических матриц. Каждая из матриц последовательности будет уточнять оптимальные по конусу решения. Обозначим через K_1 конус из (3) и $X_1^* \subset X$ соответствующее множество оптимальных по этому конусу решений. Этот конус определён матрицей A_1 из последовательности (6). Обозначим через K_2 и $X_2^* \subset X$ конус и множество оптимальных по нему решений для матрицы $A_2 \cdot A_1$, являющейся произведением матриц A_2 и A_1 из последовательности (6). Аналогично для натурального n обозначим K_n и $X_n^* \subset X$ конус и множество оптимальных по этому конусу решений, определённых матрицей $A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1$, составленной как произведение матриц из последовательности (6). Результатом является новая последовательность матриц

$$A_1, A_2 \cdot A_1, \dots, A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1, \dots, \qquad n \in N. \tag{7}$$

Для каждой матрицы из последовательности (7) определён многогранный конус аналогично (3) и множество оптимальных по этому конусу решений (определение 1) в многокритериальной задаче (1).

Теорема 4. *Пусть матрицы $A_i, i \in N$ из последовательности (6) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда для любого натурального n*
а) матрица $A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1$ из последовательности (7) является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;
б) для конусов, соответствующих этим матрицам, имеет место включение $K_n \subset K_{n+1}$;
в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений в задаче (1) имеет место включение $X_n^* \supset X_{n+1}^*$.

Пункт а) следует из правила умножения неотрицательных матриц. Многогранный конус K_n определяется как решение однородной системы неравенств $A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1 \cdot x \geq 0_m$. Многогранный конус K_{n+1}, как решение соответствующей системы однородных неравенств, есть следствие последней системы, так как $A_{n+1} \cdot A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1 \cdot x \geq 0_m$. Напомним, что элементы матрицы $A_i, i \in N$ неотрицательны. Поэтому имеет место включение конусов $K_n \subset K_{n+1}$. Наконец, в) следует из теоремы 2.
Для матрицы $A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1$ из теоремы 4 верны условия теоремы Фробениуса [5, с. 355], именно, выполнена

Теорема 5. *Пусть матрицы $A_i, i \in N$ из последовательности (6) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими Тогда существует предел последовательности матриц (7), т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1 = A_0.$$

Матрица A_0 является положительной, вырожденной с рангом равным 1, все строки матрицы равны между собой и сумма элементов каждой строки равна 1.

Последнее является основанием для уточнения оптимального решения в многокритериальной задаче (1).

Определение 2. Рассматривается многокритериальная задача (1) и последовательность неотрицательных, невырожденных, неразложимых, стохастических матриц (6). Пусть набор чисел $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, a_i \geq 0$, представляет строку предельной матрицы A_0 из теоремы 5. Тогда исход

$$x^* \in \arg\max_{x \in X}(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_m f_m(x)) \tag{8}$$

будем называть уточнённым по последовательности матриц (конусов) (6) оптимальным (максимальным) решением многокритериальной задачи (1).

Теорема 6. *Пусть в многокритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X \subset R^n$ компактно, векторная функция выигрыша $f : X \to R^m$ непрерывна, квадратные матрицы порядка m в последоватеьности (6) являются неотрицательными, невырожденными, неразложимыми, стохастическими. Тогда в задаче существует уточнённое по последовательности матриц (конусов) (6) оптимальное решение.*

Существование уточнённого по последовательности матриц решения следует их компактности множества допустимых исходов X и непрерывности функции $f(x) = (a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_m f_m(x))$, где $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \quad a_i \geq 0$, есть строка предельной матрицы A_0 из теоремы 5.

Теорема 7. *Уточнённое по последовательности матриц (6) решение $x* \in X$ является оптимальным (максимальным)по Парето решением многокритериальной задачи (1), более того, оно является оптимальным (максимальным)по любому конусу, определённому матрицей из последовательности (7).*

Уточнение оптимального по Парето (по конусу) решения многокритериальной задачи (1)определяется последовательностью матриц (6). В частности такая последовательность может состоять из постоянных матриц, то-есть $A_i = A, i \in N$ и A произвольная неотрицательная, невырожденная, неразложимая, стохастическая квадратная матрица порядка m. Тогда последовательность (7) составляют натуральные степени матрицы A.Отметим, что строки предельной матрицы из теоремы 5 для последовательности, составленной из степеней исходной матрицы A, есть левый собственный вектор для матрицы A. Суммируя результаты для данного частного случая получаем

Теорема 8. *Пусть квадратная матрица A порядка m является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда*
а) существует предел последовательности

$$\lim_{n \to \infty} A^n = A_0;$$

б) предельная матрица A_0 является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической и все строки этой матрицы равны левому собственному вектору $a = (a_1, a_2, \dots, a_m), \sum_{i=1}^{m} a_i = 1, a_i \geq 0$, относящемуся к максимальному собственному значению $\lambda = 1$;
с) для последовательности матриц $A^n, \quad n = 1, 2, ...$, соответствующая последовательность многогранных конусов$K_n, \quad n = 1, 2, ...$, определённая аналогично (3), удовлетворяет цепочке включений

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset K_0;$$

д)соответствующая последовательность множеств, оптимальных по конусу $K_n, n = 1, 2, \dots$, решений в задаче векторной оптимизации (1) удовлетворяет включениям

$$X_1^* \supset X_2^* \supset X_3^* \supset \cdots \supset X_n^* \supset \cdots \supset X_0^*.$$

Пример. Пусть в двухкритериальной задаче (1) множество допустимых исходов $X = R \times \Psi = [0, 1] \times [0, \pi/2]$. Задан векторный критерий

$$f(r, \theta) = (f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)) = (rcos\theta, rsin\theta).$$

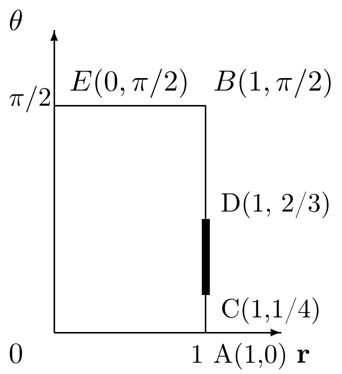

Рис.1

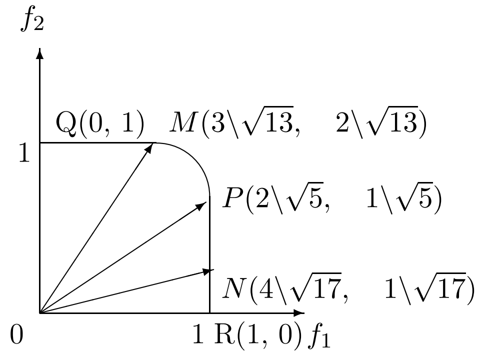

Рис.2

Здесь допустимые исходы $(r, \theta) \in R \times \Psi = [0,1] \times [0, \pi/2]$ представлены на рис.1. Предполагается, что в двухкритериальной задаче исход выбирает так, чтобы доставить возможно большие значения обоим критериям: $f_1(r, \theta) = rcos\theta$ и $f_2(r, \theta) = rsin\theta$. Значения критериев показаны на рис.2. Задан многогранный конус доминирования

$$K = \{x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2\}. \qquad (9)$$

Отметим, что в данном случае важность (вес) критериев оценивается первым экспертом в отношении 3:2 и вторым экспертом в отношении 4:1. В задаче требуется найти исходы, оптимальные относительно конуса K, в соответствии с определением 1.

Рассмотрим оценки допустимых исходов, представленные на рисунке 2. Расположим конус доминирования в R^2 так, что его вершина совпадает с оценкой некоторого исхода. Если в этом случае множество точек конуса не пересекается с множеством оценок всех допустимых исходов (за исключением общей вершины), то соответствующий исход является оптимальным по конусу K. В соответствии с этим оптимальные по конусу исходы расположены на стороне AB (рис. 1) и их оценки на дуге RNPMQ (рис.2). В этом случае $r^* = 1$. Выделим на дуге оценки, оптимальные по конусу. Они расположены на участке дуги NM (рис.2) и координаты точек $N(f_1^N, f_2^N) = (4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$ и $M(f_1^M, f_2^M) = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}))$. На дуге NM (рис.2) представлены все оценки, оптимальные по конусу. Этим оценкам соответствуют оптимальные исходы. На рисунке 1 эти исходы составляют отрезкок CD и координаты точек $C(1, \arctan 1/4)$ и $D(1, \arctan 2/3)$. В данном примере получены все максимальные по конусу K исходы

$$(r^*, \theta^*), \qquad r^* = 1, \qquad \arctan 1/4 \leq \theta^* \leq \arctan 2/3.$$

Они изображены отрезком CD на рис.1. Множество соответствующих оценок

$$(f_1^*, f_2^*) \in \{(r^* \sin\theta^*, r^* \cos\theta^*) | r^* = 1, \arctan 1/4 \leq \theta^* \leq \arctan 2/3\}.$$

указаны дугой NM на рис.2.

Отметим, что в данной многокритериальной задаче (9) максимальные по конусу решения являются уточнением максимальных по Парето решений. Действительно паретовские исходы представляются отрезком AB на рисунке 1 и их оценки - всей дугой RNPMQ на рисунке 2.

Продолжим рассмотрение двухкритериальной задачи. Для неё конус доминирования K представлен в (9). Его можно задать с помощью стохастической матрицы, которую, также обозначим A

$$K = \{x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0_2\}.$$

Найдем предел последовательности матриц

$$\lim_{n\to\infty} A^n = A_0.$$

Наибольшее собственное значение матрицы A есть $\lambda = 1$. Определим соответствующий левый собственный вектор $x^T = (x_1, x_2), x_1 + x_2 = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2$, из решения системы двух уравнений

$$\begin{aligned} -2\backslash 5x_1 + 4\backslash 5x_2 \geq 0, \\ 2\backslash 5x_1 - 4\backslash 5x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Получаем, $x^T = (2\backslash 3, 1\backslash 3)$. Тогда по теореме 8 матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определением 2 уточнённым по конусу K максимальным решением многокритериальной задачи будут решения задачи математического программирования (задача максимизации)

$$\langle [0,1] \times [0, \pi/2], \qquad 2rcos\theta + rsin\theta \rangle.$$

Здесь максимальное значение достигается при $r^\bullet = 1, \theta^\bullet = \arctan 1/2$. Эти же значения будут доставлять единственное уточнённое максимальное по конусу решение двухкритериальной задачи. Это решение представлено на рисунке 1. Тогда уточнённый максимальный по конусу векторный выигрыш будет $f^\bullet = (f_1^\bullet, f_2^\bullet) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Он приведён в критериальном пространстве на рисунке 2.

Список литературы

[1] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

[2] Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. Москва: Книжный дом "Университет", Высшая школа, 2002.

[3] Математическая энциклопедия. Москва: Советская энциклопедия, 1979.

[4] Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Парето оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука, 1982.

[5] Гантмахер Ф.П. Теория матриц. Москва: Наука, 1967.

[6] Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва: Наука, 1969.

О БЭРОВСКОЙ КАТЕГОРИИ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КЛАССА

Новиков В.В.
Саратовский государственный университет, механико-математический факультет
Саратов, Россия

1. Введение.

Пусть $\alpha,\beta>-1$ и $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность многочленов Якоби, ортонормированных на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$; $-1<x_{n,n}<x_{n-1,n}<\ldots<x_{1,n}<1$ - нули многочлена $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания.

Пусть, далее, $f\in C[-1,1]$. Обозначим через

$$\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_kP_k^{(\alpha,\beta)}(x),\ a_k=\int_{-1}^{1}f(x)P_k^{(\alpha,\beta)}(x)w(x)dx,$$

частичную сумму ряда Фурье-Якоби функции f, а через

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k,n})l_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(x),\quad {l_{k,n}}^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}{}'(x_{k,n})(x-x_{k,n})},$$

- многочлен Лагранжа, интерполирующий f в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$.

Известно, что в асимптотическом поведении при $n\to\infty$ последовательностей $\{\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)\}$ и $\{{L_n}^{(\alpha,\beta)}(f,x)\}$ имеется много общего. Отчасти это объясняется сходством конструкции полиномов $\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ и ${L_n}^{(\alpha,\beta)}(f,x)$, которое приводит к тому, что для функций $f\in C[-1,1]$ с достаточно "хорошими"структурными свойствами обе последовательности равномерно сходятся. Широко известными примерами классов таких функций являются функции $f\in C[-1,1]$ ограниченной вариации или функции, удовлетворяющие условию Дини-Липшица (см. например, [1]).

Вместе с тем, для произвольной непрерывной функции f, даже при $\alpha=\beta=-1/2$, сходимость либо расходимость одной из последовательностей $\{\sigma_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(f,x)\}$ или $\{{L_n}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(f,x)\}$ никак не влияет на поведение другой. В 1938 году П.Эрдеш и Г.Грюнвальд [2] построили пример функции $f\in C[-1,1]$ для которой последовательность $\{{\sigma_n}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(f,x)\}$ сходится на [-1,1] равномерно, тогда как $\{{L_n}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(f,x)\}$ всюду неограниченно расходится. Имеет место и, в некотором смысле, "симметричное"утверждение [3]: существует непрерывная функция f, для которой $\{{L_n}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(f,x)\}$ равномерно сходится, а $\{{\sigma_n}^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(f,x)\}$ расходится в точке (точнее, в [3] рассмотрен тригонометрический случай, который легко переносится на обсуждаемый здесь случай алгебраического интерполирования и ряда Фурье-Чебышева).

В связи с этим, представляет интерес вопрос о характеристике в тех или иных терминах множества функций $f\in C[-1,1]$, для которых равномерно сходится как ряд Фурье-Якоби, так и интерполяционный процесс Ларанжа с узлами в нулях многочленов Якоби. В настоящей статье получена характеристика указанного множества в терминах бэровской категории.

Пусть $-1<a<b<1,\ \alpha>-1,\ \beta>-1$ - произвольные фиксированные числа. Обозначим через $U^{(\alpha,\beta)}=U(a,b,\alpha,\beta)$ множество функций из C[-1,1] с равномерно сходящимся на $[a,b]$ рядом Фурье-Якоби, а через $S^{(\alpha,\beta)}=S(a,b,\alpha,\beta)$ - множество функций $f\in C[-1,1]$, для которых равномерно на $[a,b]$ сходится интерполяционный процесс $\{L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)\}$. Легко проверить, что $U^{(\alpha,\beta)}$ и $S^{(\alpha,\beta)}$ будут нормироваными пространствами, если определить в них нормы [5], соответственно, соотношениями

$$\|f\|_U=\sup_n\left\|\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]}$$

и

$$\|f\|_S=\sup_n\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]}.$$

Положим

$$A^{(\alpha,\beta)}:=\{\ f\in C[-1,1]\colon \lim_{n\to\infty}||f-L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)||_{C[a,b]}=\lim_{n\to\infty}||f-\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)||_{C[a,b]}=0\ \}.$$

Теорема. *Множество $A^{(\alpha,\beta)}$ является множеством первой категории Бэра как в пространстве $U^{(\alpha,\beta)}$, так и в пространстве $S^{(\alpha,\beta)}$ при любых $\alpha,\beta > -1$.*

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Оператор $L_n^{(\alpha,\beta)}$, действующий из $U^{(\alpha,\beta)}$ в $U^{(\alpha,\beta)}, n\in\mathbb{N}$, линеен и ограничен.*

Доказательство. Линейность очевидна. Убедимся в ограниченности. Если $f\in U^{(\alpha,\beta)}$, то

$$\|f\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty}\left\|\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]} \le \sup_n \left\|\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]} = \|f\|_U,$$

поэтому

$$\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_U \le \sum_{k=1}^n |f(x_{k,n})| \left\|l_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(\cdot)\right\|_U \le$$

$$\le \|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=1}^n \left\|l_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(\cdot)\right\|_U \le \|f\|_U \sum_{k=1}^n \left\|l_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(\cdot)\right\|_U.$$

Множитель при $\|f\|_U$ не зависит от f, откуда и следует ограниченность оператора $L_n^{(\alpha,\beta)}$.

Лемма 2. *Оператор $\sigma_n^{(\alpha,\beta)}$, действующий из $S^{(\alpha,\beta)}$ в $S^{(\alpha,\beta)}, n\in\mathbb{N}$, линеен и ограничен.*

Доказательство. Снова в проверке нуждается только ограниченность. Для любой $f\in S^{(\alpha,\beta)}$ имеем

$$\|f\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty}\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]} \le \sup_n \left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]} = \|f\|_S. \quad (1)$$

Тогда

$$\left\|\sigma_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_S = \left\|\sum_{k=0}^n a_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|_S \le \sum_{k=0}^n |a_k| \left\|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|_S =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left|\int_{-1}^1 f(x)P_k^{(\alpha,\beta)}(x)w(x)dx\right| \left\|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|_S \le$$

$$\le \|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=0}^n \left|\int_{-1}^1 \left|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)w(x)\right|dx\right| \left\|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|_S \le C\|f\|_S,$$

где константа C не зависит от функции f. Ограниченность $\sigma_n^{(\alpha,\beta)}$ доказана.

Лемма 3. *Пространства $S^{(\alpha,\beta)}$ и $U^{(\alpha,\beta)}$ являются полными в смысле норм $\|\cdot\|_S$ и $\|\cdot\|_U$ соответственно.*

Доказательство. Докажем полноту $S^{(\alpha,\beta)}$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset S^{(\alpha,\beta)}$ - произвольная фундаментальная по норме $\|\cdot\|_S$ последовательность. Поскольку для любой $f\in S^{(\alpha,\beta)}$ верно (1), из фундаментальности в $S^{(\alpha,\beta)}$ следует фундаментальность в $C[a,b]$. Так как $C[a,b]$ - полное, существует функция $f\in C[a,b]$ такая, что $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset S^{(\alpha,\beta)}$ равномерно сходится к f. Убедимся, что $f\in S^{(\alpha,\beta)}$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ к f существует номер m_0, начиная с которого

$$\|f-f_m\|_{C[a,b]} < \varepsilon/4, \quad m\ge m_0. \quad (2)$$

Поскольку $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в $S^{(\alpha,\beta)}$, найдется такой номер m (можно сразу считать, что $m\ge m_0$) такой, что для всех $\nu\ge m$

$$\sup_n \left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f_m,\cdot) - L_n^{(\alpha,\beta)}(f_\nu,\cdot)\right\|_{C[a,b]} < \varepsilon/4. \quad (3)$$

Из равномерной сходимости к f_m последовательности $\{L_n^{(\alpha,\beta)}(f_m,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ следует существование номера n_0, для которого

$$\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f_m,\cdot)-f_m\right\|_{C[a,b]}<\varepsilon/4. \tag{4}$$

при всех $n\geq n_0$.

Наконец, ограниченность оператора $L_n^{(\alpha,\beta)}:C[a.b]\to C[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$, и равномерная сходимость $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ обеспечивают существование индекса ν такого, что

$$\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f_\nu,\cdot)\right\|_{C[a,b]}\leq\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}\right\|_{C[a,b]\to C[a,b]}\|f-f_\nu\|_{C[a,b]}<\varepsilon/4. \tag{5}$$

Номер ν можно выбрать настолько большим, что для него будет выполнено (3). Итак, считаем, что по ε выбраны номера m, n, ν, гарантирующие выполнение (2)-(5). Имеем

$$\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)-f\right\|_{C[a,b]}\leq\|f_m-f\|_{C[a,b]}+\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f_m,\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f_\nu,\cdot)\right\|_{C[a,b]}+$$

$$+\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f_m,\cdot)-f_m\right\|_{C[a,b]}+\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f_\nu,\cdot)\right\|_{C[a,b]}<\varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная сходимость $\{L_n^{(\alpha,\beta)}(f_\nu,x)\}$ к $f(x)$ и $f\in S^{(\alpha,\beta)}$.

Убедимся в том, что $\|f-f_k\|_S\to 0$, при $k\to\infty$. Для $\varepsilon>0$ найдем k такое, что $\|f_k-f_m\|_S<\varepsilon/2$ для всех $m\geq k$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ подберем номер $p(n)>k$ такой, что $\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f_{p(n)},\cdot)\right\|_{C[a,b]}<\varepsilon/2$. Тогда будем иметь

$$\|f-f_k\|_S=\sup_n\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f_k,\cdot)\right\|_{C[a,b]}\leq\sup_n\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f_{p(n)},\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\right\|_{C[a,b]}+$$

$$+\sup_n\left\|L_n^{(\alpha,\beta)}(f_{p(n)},\cdot)-L_n^{(\alpha,\beta)}(f_k,\cdot)\right\|_{C[a,b]}<\varepsilon.$$

Таким образом, $S^{(\alpha,\beta)}$ - полное пространство.

Аналогично доказывается полнота пространства $U^{(\alpha,\beta)}$.

Лемма 4. [7] *Пусть $\alpha>-1,\beta>-1$. Тогда существует непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция f такая, что последовательность интерполяционных многочленов $\{L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\}$ расходится почти всюду на $[-1,1]$, и, в то же время, ряд Фурье-Якоби функции f сходится равномерно к f на любом отрезке $[a,b]\subset(-1,1)$.*

3. Доказательство теоремы.

Из теоремы Банаха-Штейнгауза следует [6], что последовательность линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в нормированное пространство Y, сходится либо на всем X, либо на некотором множестве $X_0\subset X$ первой категории.В силу леммы 4 все пространство $U^{(\alpha,\beta)}$ не является множеством сходимости к единичному оператору последовательности операторов $\{L_n^{(\alpha,\beta)}\}$ ни при каких $\alpha>-1,\beta>-1$. Поэтому для обоснования того, что $A^{(\alpha,\beta)}$, как подмножество $U^{(\alpha,\beta)}$, имеет первую категорию, достаточно применить лемму 1.

Докажем теперь, что $A^{(\alpha,\beta)}$ имеет первую категорию в $S^{(\alpha,\beta)}$. В силу леммы 3 пространство $S^{(\alpha,\beta)}$ является полным. Используя, с надлежащими изменениями, метод работы [3], можно показать, что для любых фиксированных a, b, $-1<a<b<1$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$ и $x_0\in[a,b]$ существует функция [4] $f\in C[-1,1]$, для которой интерполяционный процесс Лагранжа $\{L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)\}$ равномерно сходится на $[a,b]$, а ряд Фурье-Якоби расходится в точке x_0. Таким образом, все пространство $S^{(\alpha,\beta)}$ не является множеством сходимости к единичному оператору последовательности $\{\sigma_n^{(\alpha,\beta)}\}$. Поскольку эти операторы линейны и ограничены в силу леммы 2, они могут сходится только на некотором множестве первой категории в $S^{(\alpha,\beta)}$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит. 1962. 500 с.

[2] *Erdős P., Grünwald G.* Uber einen Faber'schen Satz //Annals of Math. 1938. V. 39. P. 257-261.

[3] *Новиков В.В.* О расходимости ряда Фурье функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа //Analysis Mathematica. 2003. V. 29. P. 289-317.

[4] *Новиков В.В.* О расходимости ряда Фурье-Якоби функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа-Якоби//"Современные методы теории функций и смежные проблемы"Материалы Воронежской зимн. школы. Воронеж, 27 янв.-2 февр. 2005 г. - Воронеж: ВГУ. - 2005. - с. 168.

[5] *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир. 1976.

[6] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1984.

[7] *Привалов А.А.* Интерполяционные многочлены Лагранжа и ортогональные ряды Фурье-Якоби//Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 2. С. 215-226.

КВАЗИАВТОМОДЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ВОЛНОВЫМ СФЕРОИДАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

С. Л. Скороходов
ВЦ РАН
Москва, Россия

Разработан высокоточный аналитико-численный метод расчета собственных значений $\lambda_{m,n}(c)$, соответствующих вытянутым и сплюснутым сфероидальным функциям. Метод использует адекватные разложения и аппроксимации Паде. Получены новые закономерности подобия $\lambda_{m,n}(c)$ для различных параметров m, n и c, позволяющие ввести для λ понятие квазиавтомодельности высокого порядка. Обширные численные расчеты показали высокую эффективность метода.

1. ВВЕДЕНИЕ

Волновые сфероидальные функции возникают при решении волнового уравнения в сфероидальных координатах (см. [1], [2] и цитированную там литературу), определяемых параметром c – характеристикой вытянутости/сплюснутости сфероида. С использованием разделения переменных задача приводится к нахождению счетного множества собственных значений λ_n и собственных функций $S_n(\eta)$ – ограниченных на отрезке $\eta \in [-1, 1]$ решений сингулярной задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка. Для вытянутых и сплюснутых сфероидов эти задачи принято ставить отдельно.

Задача $\mathcal{P}_1$. Для вытянутого сфероида необходимо найти собственные значения λ и собственные функции $S(\eta)$ – ограниченные на $\eta \in [-1, 1]$ решения уравнения:

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}\,S(\eta)\right] + \left(\lambda - c^2\,\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)S(\eta) = 0\,. \tag{1.1}$$

Функция $S(\eta)$ имеет три особых точки: $\eta = \{-1,\,1,\,\infty\}$. Будем рассматривать аналитическую ветвь функции $S(\eta)$ в ее звезде Миттаг-Леффлера (см. [3]), то есть в плоскости комплексного η с двумя разрезами по вещественной оси: $\{\eta:\ \ \eta \le -1\}$ и $\{\eta:\ \ \eta \ge 1\}$. Параметр вытянутости сфероида c считается заданным вещественным числом, он связан с характеристикой семейства софокусных эллипсов и софокусных гипербол, образующих вытянутые сфероидальные координаты, следующим образом:

$$c = \frac{fk}{2},$$

где $2f$ – расстояние между фокусами семейства этих эллипсов и гипербол, а число k – параметр в исходном трехмерном уравнении Гельмгольца:

$$\nabla^2\Phi \,+\, k^2\Phi = 0\,,$$

решение которого с помощью метода разделения переменных в сфероидальных координатах приводит к уравнению (1.1).

Величина m в уравнении (1.1) считается заданным неотрицательным целым числом, $m = 0, 1, \ldots$. Искомые собственные значения λ будем нумеровать с помощью индекса n, причем принято считать $n \ge m$; зависимость λ от параметров c, m, n будем обозначать

$$\lambda = \lambda_{m,\,n}(c)\,, \qquad n = m,\, m+1, \ldots .$$

Собственные функции $S(\eta) = S_{m,\,n}(c;\,\eta)$ называются вытянутыми угловыми сфероидальными функциями, их нормировка может выбираться различными способами (см. [4]).

Задача $\mathcal{P}_2$. Для сплюснутого сфероида необходимо найти собственные значения λ и собственные функции $S(\eta)$ – ограниченные на $\eta \in [-1, 1]$ решения уравнения:

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}\,S(\eta)\right] + \left(\lambda + c^2\,\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)S(\eta) = 0\,. \tag{1.2}$$

Функция $S(\eta)$, решение (1.2), имеет те же самые особые точки $\eta = \{-1,\, 1,\, \infty\}$, ее будем рассматривать в такой же звезде Миттаг-Леффлера, параметр сплюснутости c считается заданным вещественным числом и определяется аналогично случаю вытянутого сфероида. Значения m, n и $\lambda_{m,\,n}(c)$ имеют прежний смысл. Собственные функции $S(\eta) = S_{m,\,n}(c;\,\eta)$ называются сплюснутыми угловыми сфероидальными функциями, их нормировка такая же, как и для вытянутых угловых функций (см. [4]).

Уравнение (1.2) связано с (1.1) с помощью соотношения $c_{(1.1)} = \pm\, i c_{(1.2)}$.

Вытянутые и сплюснутые угловые функции $S_{m,\,n}(c;\,\eta)$ обладают свойством четности/нечетности в зависимости от четности значения $(n-m)$: при четном $(n-m)$ функция $S_{m,\,n}(c;\,\eta)$ четная, при нечетном $(n-m)$ — она нечетная.

Одним из методов решения задач $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ является метод фазовых функций в сочетании с методами локального переноса граничных условий из особых точек (см. [5], [6]).

Другим подходом к решению задач $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ является представление функции $S_{m,\,n}(c;\,\eta)$ в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра первого рода $P^m_{m+r}(\eta)$ (см. [1], [4]):

$$S_{m,\,n}(c;\,\eta) = \sum_{r=0,\,1}^{\infty} d^{mn}_r(c)\, P^m_{m+r}(\eta)\,,$$

где суммирование проводится по четным либо по нечетным значениям r в соответствии с четностью $(n-m)$. Искомые коэффициенты $d^{mn}_r(c)$ удовлетворяют трехчленному рекуррентному уравнению (см. [4])

$$a_k d_{k+2} + (b_k - \lambda) d_k + e_k d_{k-2} = 0 \tag{1.3}$$

с заданными значениями a_k, b_k, e_k. Условие выделимости ограниченного при $k \to \infty$ решения d_k приводит к трансцендентному уравнению $V(\lambda) = 0$ для счетного множества корней λ_n; функция $V(\lambda)$ включает конечную и бесконечную цепные дроби (см. [4]).

Решение уравнения $V(\lambda) = 0$ с помощью итерационного метода Ньютона требует вычисления производной $V\,'(\lambda)$ и знания "хорошего" начального приближения $\lambda^{(0)}$ к корню λ_n. Однако обширные численные эксперименты показали, что очень часто сходимость метода Ньютона к корню λ_n с нужным номером n бывает очень плохой – метод сходится к корню с другим номером, даже несмотря на чрезвычайную близость начального приближения $\lambda^{(0)}$ к искомому значению λ_n. Причина этого кроется в том, что функция $V(\lambda)$ в окрестности корня λ_n может иметь полюс первого порядка, связанный с наличием в этой окрестности нуля знаменателя одной из цепных дробей. Такой полюс порождает неограниченность функции $V(\lambda)$ и ее "барьерность" (barrier-type) в окрестности корня λ_n, что часто и приводит к сходимости итерационного метода к одному из соседних корней $\lambda_{n\pm 1}, \ldots$.

Чтобы эффективно вычислять производную $V\,'(\lambda)$ в методе Ньютона и обеспечить сходимость итераций к необходимому корню λ_n был разработан иной подход и выявлены новые закономерности в поведении собственных значений $\lambda_n = \lambda_{m,n}(c)$. Эти закономерности связаны со специальным законом подобия функций $\lambda_{m,n}(c)$, что может быть названо квазиавтомодельностью (пример такого подобия в механике жидкости см. в [7], при расчете собственных значений уравнения Матье – см. в [8]).

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Домножим обе части (1.1) на $(1-\eta^2)$ и получим уравнение с полиномиальными коэффициентами. Далее используем представление (см. [1])

$$S(\eta) = (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}}\, \widehat{S}(\eta)\,,$$

упрощающее вид уравнения для $\widehat{S}(\eta)$:

$$(1-\eta^2)\, \widehat{S}\,''(\eta) - 2(m+1)\eta\, \widehat{S}\,'(\eta) + \left[\lambda - m(m+1) - c^2\eta^2\right] \widehat{S}(\eta) = 0\,. \tag{2.1}$$

2.1. Окрестность особой точки $\eta = 1$. В окрестности точки $\eta = 1$ ищем решение $\widehat{S}(\eta) = \widehat{S}_1(\eta)$ в виде:

$$\widehat{S}_1(\eta) = A_1 U_1(\eta)\,, \qquad U_1(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{s}_k (1-\eta)^k\,, \qquad |1-\eta| < 2\,, \qquad A_1 - \mathrm{Const}. \tag{2.2}$$

Радиус сходимости разложения (2.2) равен двум – т. е. расстоянию от точки $\eta = 1$ до особой точки $\eta = -1$. Дифференцируя разложение (2.2) два раза, находим представления для $\widehat{S}_1'(\eta)$ и $\widehat{S}_1''(\eta)$. Подставляя эти разложения в (2.1), представляя все многочлены в виде сумм по степеням $(1-\eta)^k$ и собирая вместе все члены при степенях $(1-\eta)^k$, получаем соотношение для коэффициентов $\widehat{s}_k$:

$$2k(k+m)\widehat{s}_k - \big[(k+2m)(k-1) + m(m+1) + c^2 - \lambda\big]\widehat{s}_{k-1} + 2c^2\widehat{s}_{k-2} - c^2\widehat{s}_{k-3} = 0\,. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) является 4-х членным рекуррентным, решать его необходимо в сторону увеличения номера k, полагая

$$\widehat{s}_0 = 1\,, \qquad \widehat{s}_{-1} = \widehat{s}_{-2} = \widehat{s}_{-3} = 0\,. \tag{2.4}$$

При $k = 0$ уравнение (2.3) с условиями (2.4) превращается в тождество, а при $k \geq 1$, в силу линейности и однородности (2.3), общее его решение определено с точностью до множителя, что отражено в представлени (2.2).

Тогда, вычисляя коэффициенты $\widehat{s}_k$ и используя ряд (2.2) и его производную для $\widehat{S}_1(\eta)$ и $\widehat{S}_1'(\eta)$, соответственно, получим для любой точки η в круге $|1-\eta| < 2$ сходящееся разложение. Асимптотическая при $k \to \infty$ скорость сходимости этих рядов равна скорости сходимости геометрического ряда со знаменателем $|1-\eta|/2$.

2.2. Окрестность регулярной точки. В окрестности регулярной точки $\eta_0 \neq \{-1,\ 1\}$ решение $\widehat{S}(\eta)$ ищем в виде:

$$\widehat{S}(\eta) = A\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k (\eta-\eta_0)^k\,, \qquad |\eta-\eta_0| < \min(|\eta_0 - 1|,\, |\eta_0+1|)\,, \qquad A - \mathrm{Const}. \tag{2.5}$$

Радиус сходимости разложения (2.5) равен расстоянию от η_0 до ближайшей особой точки $\eta = 1$ или $\eta = -1$.

Дифференцируя (2.5) дважды и представляя многочлены в (2.1) в виде сумм по степеням $(\eta-\eta_0)^k$, находим соотношение для коэффициентов $\widetilde{s}_k$:

$$(1-\eta_0^2)k(k-1)\widetilde{s}_k - 2\eta_0(k-1)(m+k-1)\widetilde{s}_{k-1} + \big[\lambda - m(m+1) - c^2\eta_0^2 - (k-2)(k+2m-1)\big]\widetilde{s}_{k-2} -$$
$$- 2\eta_0 c^2 \widetilde{s}_{k-3} - c^2\widetilde{s}_{k-4} = 0\,. \tag{2.6}$$

Решать уравнение (2.6) необходимо в сторону увеличения номера k, полагая

$$\widetilde{s}_{-1} = \widetilde{s}_{-2} = \widetilde{s}_{-3} = \widetilde{s}_{-4} = 0\,. \tag{2.7}$$

При $k = 0$ и $k = 1$ уравнение (2.6) с условием (2.7) удовлетворяется при любых $\widetilde{s}_0$ и $\widetilde{s}_1$, поэтому, в силу линейности и однородности (2.7), общее его решение с условием $\widetilde{s}_n = 0$ при $n < 0$ будет суммой $s_k = A_1\,\widetilde{s}_k^{(1)} + A_2\,\widetilde{s}_k^{(2)}$ двух базисных решений с условиями

$$\widetilde{s}_0^{(1)} = 1,\ \widetilde{s}_1^{(1)} = 0\,, \qquad \widetilde{s}_0^{(2)} = 0,\ \widetilde{s}_1^{(2)} = 1\,, \qquad \widetilde{s}_n^{(1)} = \widetilde{s}_n^{(2)} = 0\,,\ \ n < 0\,, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{s}_k^{(1)}$ и $\widetilde{s}_k^{(2)}$ при $k \geq 2$ находятся из (2.6), (2.8), а A_1, A_2 – Const. Асимптотическая при $k \to \infty$ скорость сходимости ряда (2.5) в точке η равна скорости сходимости геометрического ряда со знаменателем $|\eta-\eta_0|/r_0$, где $r_0 = \min(|\eta_0 - 1|,\, |\eta_0 + 1|)$.

2.3. Окрестность точки $\eta = 0$. Для выделения четных и нечетных решений $\widehat{S}(\eta)$ наиболее удобно строить разложение в точке $\eta_0 = 0$. Из (2.5)-(2.8) следует представление четного $\widehat{S}_0^{(ev)}(\eta)$ и нечетного $\widehat{S}_0^{(od)}(\eta)$ решений:

$$\widehat{S}_0^{(ev,\,od)}(\eta) = A_0 U_0^{(ev,\,od)}(\eta)\,, \quad U_0^{(ev,\,od)}(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k^{(ev,\,od)}\eta^k\,, \qquad |\eta| < 1\,, \qquad A_0 - \mathrm{Const}\,, \tag{2.9}$$

$$k(k-1)\widetilde{s}_k^{(ev,\,od)} + \big[\lambda - m(m+1) - (k-2)(k+2m-1)\big]\widetilde{s}_{k-2}^{(ev,\,od)} - c^2\widetilde{s}_{k-4}^{(ev,\,od)} = 0\,, \tag{2.10}$$

$$\widetilde{s}_0^{(ev)} = 1\,,\ \ \widetilde{s}_1^{(ev)} = 0\,, \qquad \widetilde{s}_0^{(od)} = 0\,,\ \ \widetilde{s}_1^{(od)} = 1\,, \qquad \widetilde{s}_k^{(ev,\,od)} = 0,\ k < 0\,. \tag{2.11}$$

2.4. Сшивка решений. Для получения гладкого на отрезке $\eta \in [-1,\,1]$ решения $\widehat{S}(\eta)$ необходимо построить в точке $\eta = 0$ разложение (2.9) для $\widehat{S}_0(\eta) = A_0U_0(\eta)$ и его производной $\widehat{S}_0'(\eta)$, затем построить разложение (2.2) в точке $\eta = 1$ для $\widehat{S}_1(\eta) = A_1U_1(\eta)$ и производной $\widehat{S}_1'(\eta)$. Выбрав в пересечении $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} = \{\eta:\ |\eta| < 1\}\bigcap\{\eta:\ |1-\eta| < 2\}\,,$$

областей сходимости обоих разложений некоторую точку η_*, добъемся совпадения в $\eta = \eta_*$ значений решения и производной:

$$A_0U_0(\eta_*) = A_1U_1(\eta_*)\,, \qquad A_0U_0'(\eta_*) = A_1U_1'(\eta_*)\,. \tag{2.12}$$

Отсюда и из уравнения (2.1), имеющего второй порядок, сразу следует совпадение в точке $\eta = \eta_*$ и всех последующих производных, $\widehat{S}_0^{(n)}(\eta_*) = \widehat{S}_1^{(n)}(\eta_*),\ n \geq 2$. Таким образом мы имеем необходимую гладкость решений $\widehat{S}_0(\eta)$ и $\widehat{S}_1(\eta)$ во всем пересечении $\mathcal{D}$ и, значит, во всей рассматриваемой плоскости с разрезами.

Первое условие в (2.12) легко реализуется с помощью выбора нормирующих констант A_0 из (2.9) и A_1 из (2.2). Для достижения второго условия в (2.12) служит параметр λ, варьируя который мы находим искомые собственные значения $\lambda_{m,n}(c)$ с заданным номером n.

2.5. Выбор наилучшей точки сшивки. Разложения для четных или нечетных решений $\widehat{S}(\eta)$ с центром в точке $\eta = 0$ имеют ненулевым каждый второй коэффициент $\widetilde{s}_k$ (см. (2.10), (2.11)), поэтому в точке сшивки $\eta_* \in \mathcal{D}$ разложения (2.11) будут иметь асимптотическую скорость сходимости геометрического ряда со знаменателем $|\eta_*|^2$. Разложение (2.2) с центром в $\eta = 1$ в этой же в точке сшивки $\eta_* \in \mathcal{D}$ будет иметь асимптотическую скорость сходимости геометрического ряда со знаменателем $|1-\eta_*|/2$. Выберем такую точку $\eta_{opt} \in \mathcal{D}$, в которой совокупная скорость сходимости обоих разложений является наилучшей:

$$\eta_{opt}: \quad \max\Big(\frac{|1-\eta_*|}{2},\ |\eta_*|^2\Big) \to \min\,. \tag{2.13}$$

Условие (2.13) приводит к уравнению $(1-\eta_{opt})/2 = \eta_{opt}^2$, решением которого является $\eta_{opt} = 1/2$. Выбор этой точки сшивки $\eta_* = 1/2$ обеспечивает асимптотическую скорость сходимости обоих разложений (2.2) и (2.9) как у геометрического ряда со знаменателем $q = 1/4$, то есть очень быструю сходимость.

2.6. Вычисление производной в методе Ньютона. Итерационный метод Ньютона, служащий для нахождения нуля достаточно гладкой функции $\Phi(\lambda)$, включает вычисление значений $\Phi(\lambda)$ и производной $\Phi\,'(\lambda)$:

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \Phi(\lambda^{(n)})/\Phi\,'(\lambda^{(n)})\,. \tag{2.14}$$

Производную $\Phi\,'(\lambda)$ будем вычислять не с помощью разностных производных, а на основе соответствующих разложений.

Как следует из п. **2.4**, функцией $\Phi(\lambda)$ в данном случае является скачок производных $A_0\,\partial U_0(\lambda;\,\eta)/\partial\eta$ и $A_1\,\partial U_1(\lambda;\,\eta)/\partial\eta$ в точке сшивки $\eta = \eta_*$:

$$\Phi(\lambda) = A_0\,\frac{\partial U_0(\lambda;\,\eta)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\eta_*} - A_1\,\frac{\partial U_1(\lambda;\,\eta)}{\partial\eta}\Big|_{\eta=\eta_*}\,, \tag{2.15}$$

где нормирующие константы A_0 и A_1,

$$A_0 = U_1(\lambda;\,\eta_*)\,, \qquad A_1 = U_0(\lambda;\,\eta_*)\,,$$

обеспечивают тождественное выполнение первого условия в (2.12).

Производные по аргументу η в (2.15) находятся с помощью дифференцирования степенных разложений (2.2) и (2.9), а необходимая в (2.14) производная $\Phi'(\lambda)$ включает смешанные производные $\partial^2 U_0(\lambda;\,\eta)/\partial\lambda\partial\eta$ и $\partial^2 U_1(\lambda;\,\eta)/\partial\lambda\partial\eta$:

$$\frac{\partial^2 U_0(\lambda;\,\eta_*)}{\partial\lambda\partial\eta} = \sum_{k=1}^{\infty} k\widetilde{s}'_k(\lambda)\,\eta_*^{k-1}\,, \qquad \frac{\partial^2 U_1(\lambda;\,\eta_*)}{\partial\lambda\partial\eta} = -\sum_{k=1}^{\infty} k\widehat{s}'_k(\lambda)\,(1-\eta_*)^{k-1}\,.$$

Значения производных $\widehat{s}'_k(\lambda)$ и $\widetilde{s}'_k(\lambda)$ найдем, дифференцируя по λ уравнения (2.3) и (2.10):

$$2k(k+m)\widehat{s}'_k - \big[(k+2m)(k-1)+m(m+1)+c^2-\lambda\big]\widehat{s}'_{k-1} + 2c^2\widehat{s}'_{k-2} - c^2\widehat{s}'_{k-3} + \widehat{s}_{k-1} = 0\,,$$

$$k(k-1)\widetilde{s}'_k + \big[\lambda - m(m+1) - (k-2)(k+2m-1)\big]\widetilde{s}'_{k-2} - c^2\widetilde{s}'_{k-4} + \widetilde{s}_{k-2} = 0\,,$$

а также условия (2.4) и (2.11). Это приводит к искомым разложениям для $\partial^2 U_0(\lambda;\,\eta_*)/\partial\lambda\partial\eta$ и $\partial^2 U_1(\lambda;\,\eta_*)/\partial\lambda\partial\eta$, асимптотическая скорость сходимости которых равна, как и в случае разложений (2.2), (2.9), скорости сходимости геометрического ряда со знаменателем $q = 1/4$.

2.7. Использование аппроксимаций Паде. Для ускорения сходимости построенных разложений очень удобно пользоваться аппроксимациями Паде (см. [9], [10]). По разложению $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ здесь строятся рациональные аппроксимации $[N/M]_U = P(z)/Q(z)\,,\ \ P(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_N z^N\,,\ \ Q(z) = 1 + q_1 z + \ldots + q_M z^M$, такие что

$$U(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} = O(z^{M+N+1})\,, \quad z \to 0\,. \tag{2.16}$$

Условие (2.16) приводит к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов многочлена $Q(z)$; по найденным q_k далее определяется многочлен $P(z)$.

Наиболее популярными из аппроксимаций Паде являются диагональные аппроксимации $[N/N]_U$, когда степени многочленов P и Q совпадают: $N = M$. Эти аппроксимации часто обеспечивают в прикладных задачах быструю сходимость $[N/N]_U$ к функции $U(z)$ на больших компактах $z-$плоскости при увеличении степени N (см. [9]).

Проведенные обширные численные эксперименты, а также опыт вычисления дзета-функции Римана (см. [11]) и высокоточного расчета солитонных решений (см. [12], [13]) показали, что наиболее эффективным является использование аппроксимации Паде не для всего исходного разложения, а для его части:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \sum_{n=0}^{L-1} u_n z^n + u_L z^L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{L+n}}{u_L} z^n\,; \tag{2.17}$$

начальный отрезок ряда при этом явно суммируется. Длина L этого отрезка определяется исходя из условия, что отношение коэффициентов u_{L+1}/u_L стремится при увеличении L к определенному пределу t_0. Значение t_0 является корнем характеристического уравнения, соответствующего рекуррентному уравнению для коэффициентов u_n. Так, если для линейного однородного $(p+1)-$членного рекуррентного уравнения

$$\sum_{m=0}^{p-1} h_m(k) u_{k+m} + u_{k+p} = 0\,, \tag{2.18}$$

существуют конечные пределы

$$h_m = \lim_{k\to\infty} h_m(k)\,, \quad m = 0, 1, ..., p-1\,, \tag{2.19}$$

то характеристическим для (2.18) будет уравнение

$$\sum_{m=0}^{p-1} h_m t^m + t^p = 0. \tag{2.20}$$

Тогда при некоторых дополнительных условиях на $h_m(k)$ справедлива теория Пуанкаре и Перрона об асимптотическом поведении решений разностных уравнений (см. [14]), согласно которой существует p решений уравнения (2.18), для каждого из которых верно

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}^{(m)}}{u_k^{(m)}} = t_m\,, \quad m = 1, ..., p\,, \tag{2.21}$$

где t_m – корни многочлена (2.20).

Среди всех решений $u_k^{(m)}$ самым быстрорастущим будет решение $u_k^{(*)}$, соответствующее наибольшему по модулю корню t_m, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}^{(*)}}{u_k^{(*)}} = t_*, \qquad |t_*| = \max(|t_1|, \ldots, |t_p|)\,. \tag{2.22}$$

Тогда, в силу численной неустойчивости всех других решений, растущих медленнее, чем $u_k^{(*)}$, численное решение уравнения (2.18) с любыми начальными данными $u_0, \ldots, u_{p-1}$ будет обладать свойством (2.22). Поскольку коэффициенты $\widehat{s}_k$ и $\widetilde{s}_k$ используемых нами разложений (2.2) и (2.9) удовлетворяют уравнениям (2.3) и (2.10), имеющим общий вид (2.18), то используя (2.18)–(2.22) находим пределы для отношений

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{s}_{k+1}}{\widehat{s}_k} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\widetilde{s}_{k+2}}{\widetilde{s}_k} = 1\,. \tag{2.23}$$

Отметим здесь, что уравнение (2.10) является трехчленным с шагом 2, поэтому во втором соотношении (2.23) имеем в номерах $\widetilde{s}_k$ также шаг 2.

Теперь, имея пределы (2.23), мы использовали разбиение (2.17) для разложений (2.2), (2.9) и их производных по аргументу η и параметру λ. Длина L отрезка ряда явного суммирования выбиралась такой, чтобы отношение соседних коэффициентов с номерами $L+1$ и L совпадало с известным пределом (2.23) с относительной погрешностью менее 20%. Тогда, как было показано численно, для второй суммы в (2.17) часто оказывалось достаточным использования простейших диагональных аппроксимаций Паде типа $[2/2]_U$ или $[3/3]_U$ для получения 10 и более верных дес. знач. цифр вычисляемых функций.

2.8. Сложность метода. Разработанный метод обладает линейной сложностью, то есть при увеличении у искомого ответа числа верных дес. знач. цифр в q раз, $D_2 = qD_1$, время работы метода также увеличивается в q раз, $T_2 = qT_1$. Это следует из геометрического характера сходимости разложений (2.2), (2.9) и их производных, а также из рекуррентных уравнений (2.3) и (2.10), когда для вычисления очередного коэффициента необходимо использовать лишь три или два предыдущих.

Обширные численные эксперименты подтвердили линейный характер сложности построенного метода и показали, что функция $\Phi(\lambda)$ скачка производной (2.15) не обладает негативным свойством "барьерности", присущим цепным дробям. Поэтому сходимость метода Ньютона для расчета корней функции $\Phi(\lambda)$ оказывается очень хорошей для широких интервалов начальных приближений $\lambda^{(0)}$.

3. КВАЗИАВТОМОДЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫТЯНУТЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Разложение при малых c. Для собственных значений $\lambda_{m,n}^{(pr)}(c)$, соответствующих вытянутым ("prolate") сфероидальным функциям $S(\eta)$ из (1.1), известно несколько первых коэффициентов степенного разложения (см. [4])

$$\lambda_{m,n}^{(pr)}(c) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k} c^{2k}\,, \qquad l_0 = n(n+1)\,, \qquad l_2 = \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{(2m-1)(2m+1)}{(2n-1)(2n+3)}\Big]\,; \tag{3.1}$$

в [4] даны также значения l_4, l_6, l_8. Подставляя разложение (3.1) и аналогичное разложение для всех величин d_k в уравнение (1.3), можно получить явный вид последующих коэффициентов $l_{2k} = l_{2k}(m,n)$, $k > 4$. Трудоемкость подобных преобразований становится огромной, поэтому эти символьные преобразования проводились в системе компьютерной алгебры Maple.

Круг сходимости разложений (3.1) и положение особых точек функций $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$ в настоящее время неизвестны, исследование этих вопросов планируется провести в будущем.

3.2. Асимптотическое разложение при больших c**.** Для значений $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$ при больших величинах c параметра вытянутости сфероида известно также несколько первых коэффициентов асимптотического разложения (см. [4]):

$$\lambda^{(pr)}_{m,n}(c) = c\,q + \sum_{k=0}^{5} \frac{r_k}{c^k} \,+\, O(c^{-6})\,, \qquad c \to \infty, \tag{3.2}$$

где

$$q = \,2(n-m)+1, \qquad r_0 = m^2 - \frac{q^2+5}{8}\,, \qquad r_1 = \frac{q}{64}\,(32m^2 - q^2 - 11)\,; \tag{3.3}$$

в [4] даны также коэффициенты r_2, r_3, r_4, r_5.

3.3. Простейшая квазиавтомодельность $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$**.** Пусть $n > 0$ и $c \geq 0$. Введем переменную d по формуле

$$c(d) \,=\, \frac{l_0}{q}\,d \tag{3.4}$$

и рассмотрим функцию $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ от независимого переменного d – суперпозицию $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$ и $c(d)$:

$$\Phi^{(pr)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\,\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)\,\circ c(d) \,=\frac{1}{l_0}\,\lambda^{(pr)}_{m,n}\Big(\frac{l_0}{q}\,d\Big)\,, \tag{3.5}$$

где l_0 и q определены в (3.1) и (3.3).

Используя разложения (3.1), (3.2) и связи (3.4), (3.5), можно получить следующие свойства функции $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$:

$$\Phi^{(pr)}_{m,n}(d) = 1 + l_2\frac{l_0}{q^2}\,d^2 + O(d^4), \quad d \to 0, \tag{3.6a}$$

$$\Phi^{(pr)}_{m,n}(d) = d + \frac{r_0}{l_0} \,+ O(d^{-1}), \quad d \to \infty. \tag{3.6b}$$

На Фиг. 1 приведены графики рассчитанных десяти функций $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ при фиксированном $m = 10$ и различных параметрах $n = 31, 32, \ldots 40$. Графики становятся все ближе друг к другу при увеличении значения n.

На Фиг. 2 приведены графики десяти функций $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ при соотношении $n = 3m$ и $m = 11, 12, \ldots, 20$.

Из (3.6) видно, что в разложениях $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ в окрестностях точек $d = 0$ и $d = \infty$ лишь коэффициенты при главных членах не зависят от параметров m и n. Вторые коэффициенты этих разложений имеют следующие пределы при фиксированном m и $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} l_2 \frac{l_0}{q^2} = \frac{1}{8}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{r_0}{l_0} = -\,\frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, построенные функции $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ обладают квазиавтомодельностью порядка $O(d^2)$ при $d \to 0$ и $O(1)$ при $d \to \infty$.

3.4. Квазиавтомодельность порядка $O(d^2)$, $d \to 0$ и $O(d^{-2})$, $d \to \infty$. Исследуем квазиавтомодельность функций $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$ более высокого порядка, когда у соответствующего разложения при $d \to \infty$ три первых коэффициента не зависят от m и n.

Пусть $n > 0$ и $c \geq 0$. Введем переменную d, описывающую параметр c вытянутости сфероида:

$$c(d) \,=\, \frac{l_0}{q}\, d \left[1 + \frac{\alpha_1\, d}{1 + \beta_1\, d + d^2}\right], \tag{3.7}$$

где q задано в (3.3), а значения α_1 и β_1 определим далее. Вопрос об однозначности при $c \geq 0$ функции $d(c)$, обратной к зависимости (3.7), обсудим позже.

Теперь рассмотрим функцию $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ независимого переменного d – суперпозицию $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$ и $c(d)$ из (3.7):

$$\Psi^{(pr)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\,\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)\,\circ c(d) \,=\frac{1}{l_0}\,\lambda^{(pr)}_{m,n}\left(\frac{l_0}{q}\, d\left[1 + \frac{\alpha_1\, d}{1 + \beta_1\, d + d^2}\right]\right). \tag{3.8}$$

Используя разложения (3.1), (3.2) и связи (3.7), (3.8), можно получить следующие свойства функции $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$:

$$\Psi^{(pr)}_{m,n}(d) = 1 + l_2 \frac{l_0}{q^2}\, d^2 + O(d^3), \quad\ d \to 0, \tag{3.9a}$$

$$\Psi^{(pr)}_{m,n}(d) = d + \left(\alpha_1 + \frac{r_0}{l_0}\right) + \left(\frac{q r_1}{l_0^2} - \alpha_1\beta_1\right) d^{-1} + O(d^{-2}), \quad\ d \to \infty. \tag{3.9b}$$

Теперь в зависимости (3.7) выберем два параметра α_1 и β_1 таким образом, чтобы в разложении (3.9b) коэффициенты при степенях d^0 и d^{-1} не зависели от m и n, например, положим их равными нулю. Это дает

$$\alpha_1 = -\frac{r_0}{l_0}\,, \qquad \beta_1 = -\frac{q\, r_1}{r_0\, l_0}\,. \tag{3.10}$$

На Фиг. 3 приведены графики рассчитанных десяти функций $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ при фиксированном $m = 10$ и различных параметрах $n = 31, 32, \dots 40$; эти параметры аналогичны вариантам для функций $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ на Фиг. 1.

На Фиг. 4 приведены графики десяти функций $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ при соотношении $n = 3m$ и $m = 11, 12, \dots, 20$; эти параметры аналогичны вариантам для функций $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ на Фиг. 2.

Таким образом, построенные функции $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ обладают квазиавтомодельностью порядка $O(d^2)$ при $d \to 0$ и $O(d^{-2})$ при $d \to \infty$. Сравнение графиков на Фиг. 1 и Фиг. 3, а также на Фиг. 2 и Фиг. 4 показывает, что новые функции $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ значительно "слабее" зависят от параметров m и n, чем функции $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ из п. **3.3**.

4. КВАЗИАВТОМОДЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СПЛЮСНУТЫХ ФУНКЦИЙ

4.1. Разложение при малых c**.** Для собственных значений $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$, соответствующих сплюснутым ("oblate") сфероидальным функциям $S(\eta)$ из (1.2), степенное разложение совпадает с (3.1) с учетом замены $c^2 \to -c^2$ (см. [4]):

$$\lambda^{(ob)}_{m,n}(c) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k l_{2k} c^{2k} . \tag{4.1}$$

4.2. Асимптотическое разложение при больших c**.** Для значений $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$ при больших величинах параметра c сплюснутости сфероида известно также несколько первых коэффициентов асимптотического разложения (см. [4]):

$$\lambda^{(ob)}_{m,n}(c) = -c^2 + 2c(2\nu + m + 1) + \sum_{k=0}^{4} \frac{t_k}{c^k} + O(c^{-5}) , \qquad c \to \infty, \tag{4.2}$$

где

$$\nu = [(n-m)/2] , \qquad t_0 = -2\nu(\nu + m + 1) - m - 1 , \tag{4.3}$$

а $[\cdot]$ – целая часть числа. В [4] даны также коэффициенты t_1, t_2, t_3, t_4.

4.3. Простейшая квазиавтомодельность $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$. Пусть $n>0$ и $c\geq 0$. Введем переменную d по формуле
$$c(d) \;=\; \sqrt{l_0}\, d \tag{4.4}$$
и рассмотрим функцию $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$ от независимого переменного d – суперпозицию $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$ и $c(d)$:
$$\Phi^{(ob)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\,\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)\circ c(d) \;=\; \frac{1}{l_0}\,\lambda^{(ob)}_{m,n}\big(\sqrt{l_0}\,d\big)\,, \tag{4.5}$$
где l_0 определено в (3.1).

Используя разложения (4.1), (4.2) и связи (4.4), (4.5), можно получить следующие свойства функции $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$:
$$\Phi^{(ob)}_{m,n}(d) = 1 - l_2\, d^2 + O(d^4), \quad d\to 0, \tag{4.6a}$$

$$\Phi^{(ob)}_{m,n}(d) = -d^2 + \frac{2(2\nu+m+1)}{\sqrt{l_0}}\, d + O(1), \quad d\to\infty. \tag{4.6b}$$

Графики функций $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$ при различных m и n настолько же близки, как графики $\Phi^{(pr)}_{m,n}(d)$ на Фиг. 1 и Фиг. 2.

Из (4.6) имеем, что в разложениях $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$ в окрестностях точек $d=0$ и $d=\infty$ лишь коэффициенты при главных членах не зависят от параметров m и n. Вторые коэффициенты этих разложений имеют следующие пределы при фиксированном m и $n\to\infty$:
$$\lim_{n\to\infty}(-l_2) = -\,\frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2(2\nu+m+1)}{\sqrt{l_0}} = 2\,.$$

Таким образом, построенные функции $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$ обладают квазиавтомодельностью порядка $O(d^2)$ при $d\to 0$ и $O(d)$ при $d\to\infty$.

4.4. Квазиавтомодельность порядка $O(d^2)$, $d\to 0$ и $O(d^{-1})$, $d\to\infty$. Исследуем квазиавтомодельность функций $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$ более высокого порядка, когда у соответствующего разложения при $d\to\infty$ три первых коэффициента не зависят от m и n.

Пусть $n>0$ и $c\geq 0$. Введем переменную d, описывающую параметр c сплюснутости сфероида:
$$c(d) \;=\; \sqrt{l_0}\, d\left[1 + \frac{\gamma_1\, d}{1+\mu_1\, d + d^2}\right]; \tag{4.7}$$
значения γ_1 и μ_1 определим далее. Вопрос об однозначности при $c\geq 0$ функции $d(c)$, обратной к зависимости (4.7), обсудим позже.

Рассмотрим функцию $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$ независимого переменного d – суперпозицию $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$ и $c(d)$ из (4.7):
$$\Psi^{(ob)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\,\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)\circ c(d) \;=\; \frac{1}{l_0}\,\lambda^{(ob)}_{m,n}\Big(\sqrt{l_0}\, d\left[1 + \frac{\gamma_1\, d}{1+\mu_1\, d + d^2}\right]\Big)\,. \tag{4.8}$$

Используя разложения (4.1), (4.2) и связи (4.7), (4.8), можно получить следующие свойства функции $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$:
$$\Psi^{(ob)}_{m,n}(d) = 1 - l_2\, d^2 + O(d^3), \quad d\to 0, \tag{4.9a}$$

$$\Psi^{(ob)}_{m,n}(d) = -d^2 + 2\Big(\frac{2\nu+m+1}{\sqrt{l_0}} - \gamma_1\Big)d + \Big(\frac{2\gamma_1(2\nu+m+1)}{\sqrt{l_0}} + \frac{t_0}{l_0} + 2\gamma_1\mu_1 - \gamma_1^2\Big) + O(d^{-1}), \quad d\to\infty. \tag{4.9b}$$

Выберем в зависимости (4.7) параметры γ_1 и μ_1 таким образом, чтобы в разложении (4.9b) коэффициенты при степенях d и d^0 не зависели от m и n, например, положим их равными нулю. Это дает, с учетом (4.3),
$$\gamma_1 = \frac{2\nu+m+1}{\sqrt{l_0}}\,, \qquad \mu_1 = \frac{m+1-\nu^2-(\nu+m+1)^2}{2(2\nu+m+1)\sqrt{l_0}}\,. \tag{4.10}$$

На Фиг. 5 и Фиг. 6 приведены графики десяти функций $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$ из (4.5) и $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$ из (4.8) при соотношении $n = 2m$ и различных параметрах $m = 5, 6, \ldots 14$.

Таким образом, построенные функции $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$ обладают квазиавтомодельностью порядка $O(d^2)$ при $d \to 0$ и $O(d^{-1})$ при $d \to \infty$ и они значительно "слабее" зависят от параметров m и n, чем функции $\Phi^{(ob)}_{m,n}(d)$ из п. **4.3.**, что полностью аналогично случаю вытянутых сфероидальных функций.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованные функции $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ и $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$, как следует из их построения, не являются единственными возможными квазиавтомодельными зависимостями, описывающими соответствующие собственные значения $\lambda^{(pr)}_{m,n}(c)$ и $\lambda^{(ob)}_{m,n}(c)$. Выбор значений коэффициентов разложения в (3.9b) при степенях d^0 и d^{-1} и коэффициентов разложения (4.9b) при степенях d^1 и d^0 не равными нулю, а равными другим, не зависящим от m и n, константам, приводит к новой квазиавтомодельности того же порядка.

Исследованные зависимости $c = c(d)$ вида (3.7), (4.7) также являются лишь частными примерами более общей рациональной зависимости

$$c(d) \,=\, d\,\frac{\alpha_0 +\, \alpha_1 d + \ldots +\, \alpha_k d^k}{1 +\, \beta_1 d + \ldots +\, \beta_k d^k}\,. \tag{5.1}$$

Варьирование степени k рациональной функции (5.1) и коэффициентов α_j и β_j позволяет добиться все более высокого порядка $O(d^p)$ при $d \to 0$ и $O(d^{-q})$ при $d \to \infty$ для квазиавтомодельной зависимости нормированных собственных значений $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\lambda^{(pr)}_{m,n}(c(d))$ и $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\lambda^{(ob)}_{m,n}(c(d))$, соответствующих вытянутым и сплюснутым сфероидальным функциям.

Исследование построенных функций $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ и $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$ при $d > 0$ вне окрестностей точек $d = 0$ и $d = \infty$ может быть осуществлено численно. Как показали проведенные в пп. **3.4** и **4.4** обширные вычислительные эксперименты, эти функции также обладают в этой "промежуточной" области все более слабой зависимостью от параметров m и n.

Вопрос об одновременном построении однозначной при $c \geq 0$ функции $d = d(c)$, обратной к $c = c(d)$ из (5.1), то есть о доказательстве неравенства $c'(d) > 0$ при $d \geq 0$, оказывается сложным. Его исследование предполагается провести в будущем.

Помимо рациональной зависимости вида (5.1), связывающей параметр c вытянутости/сплюснутости сфероида и квазиавтомодельную переменную d, возможен поиск этой зависимости $c = c(d)$ и в классе других функций. Основные требования к этой функции остаются прежними. Во-первых, независимость от параметров m и n большого числа коэффициентов разложения функций $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\lambda^{(pr)}_{m,n}(c(d))$ и $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d) = \frac{1}{l_0}\lambda^{(ob)}_{m,n}(c(d))$ при $d \to 0$ и $d \to \infty$. Во-вторых, однозначность обратной к $c = c(d)$ функции $d = d(c)$ при $c \geq 0$.

Полученные в пп. **3.4** и **4.4** квазиавтомодельные зависимости $\Psi^{(pr)}_{m,n}(d)$ и $\Psi^{(ob)}_{m,n}(d)$ были использованы для нахождения адекватного начального приближения в итерационном методе Ньютона. По вычисленным значениям $\lambda_{m,n}(c)$ при фиксированных значениях m и n, с помощью формул (3.8), (3.10) и (4.8), (4.10) определялась аппроксимация $\lambda^{(0)}_{m_0,n_0}(c_0)$ для необходимых параметров m_0, n_0 и c_0.

Обширные расчеты значений $\lambda_{m,n}(c)$ проводились в системе компьютерной алгебры Maple-9.5 для параметров $0 \leq m \leq n \leq 200$ и $c \in [0, 500]$, что соответствует высоким гармоникам для сильно вытянутого и сплюснутого сфероидов. Точность вычислений при этом достигала 50-ти верных десятичных значащих цифр.

Как показали расчеты, приближение, полученное на основе разработанной квазиавтомодельности, в большинстве случаев обеспечивало быструю сходимость к корню с нужным номером. По-видимому, построение квазиавтомодельности более высокого порядка может дать еще более точную аппроксимацию собственных значений $\lambda_{m,n}(c)$ и, таким образом, еще значительнее ускорить сходимость итерационного метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 04–01–00723, 04–01–00773) и при поддержке Программы N^o 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Список литературы

[1] *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М. "Наука". 1976.

[2] http://mathworld.wolfram.com/SpheroidalWaveFunction.html

[3] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. "ИЛ". 1951.

[4] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М. "Наука". 1979.

[5] *Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В.* О численно-аналитическом исследовании задач дифракции плоской звуковой волны на идеальных вытянутых сфероидах и трехосных эллипсоидах // *Ж вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 35. N^o 9. С. 1374-1400.

[6] *Levitina T.V., Brändas E.J.* Computational Techniques for prolate shperoidal wave functions in signal processing // *J. Comput. Meth. in Sci. Engin.* 2001. V. 1. N^o 2s-3s. P. 287-313.

[7] *Gratton R., Diez A.J., Thomas L.P., Marino B., Betelu S.* Quasi-selfsimilarity for wetting drops // *Phys. Review E.* 1996. V. 53. P. 3563.

[8] *Alhargan F.A.* A complete method for the computations of Mathieu characteristic numbers of integer orders // *SIAM Review.* 1996. V. 38. N^o 2. P. 239-255.

[9] *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. "Мир". 1986.

[10] *Суетин С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // *Успехи матем. наук.* 2002. Т. 57. Вып. 1. С. 45–142.

[11] *Скороходов С.Л.* Аппроксимации Паде и численный анализ дзета-функции Римана // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2003. Т. 43. N^o 9. С. 1330–1352.

[12] *Боголюбский А.И., Скороходов С.Л.* Аппроксимации Паде, символьные преобразования и метод расчета солитонов в двухполевой модели антиферромагнетика // *Программирование.* 2004. N^o 2. С. 51-56.

[13] *Боголюбский А.И., Скороходов С.Л.* Аналитико-численный метод расчета солитонных решений в модели теории поля // *Spectral and Evolution Problems. KROMSH-2003.* 2004. Vol. 14. Simferopol. P. 152-162.

[14] *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М. "Наука". 1967.

Скороходов С.Л., ВЦ РАН, Москва, 119991, Россия

E-mail: `skor@ccas.ru`

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян
Государственный Инженерный Университет Армении
Ереван, Армения

В работе изучаются нелокальные краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка в единичном круге. Получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие нетеровость данный задачи. При выполнении этих условий определено количество линейно независимых решений однородной задачи и условия разрешимости неоднородной задачи.

§1.Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $D = \{z||z| < 1\}$ - единичный круг комплексной плоскости и $\Gamma = \partial D$ - его граница. В области D рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где A, B, C - комплексные постоянные, такие, что характеристическое уравнение $A+B\lambda+C\lambda^2 = 0$ не имеет действительных корней. Решение уравнения (1) предполагается принадлежащим классу $C^{(1,\alpha)} \bigcap C^2(D)$ и на границе Γ удовлетворяет условию

$$a\frac{\partial u}{\partial z}(x, y) + b\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(x, y) + c\frac{\partial u}{\partial z}(x, -y) + d\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(x, -y) = F(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь a, b, c и d - комплексные постоянные, F - заданная на Γ функция, удовлетворяющая условию Гельдера, а $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ - комплексные операторы дифференцирования. Пусть (x_0, y_0) – фиксированная точка границы Γ. Будем предполагать, что в этой точке неизвестная функция u удовлетворяет дополнительным условиям

$$\alpha u'_z(x_0, y_0) + \beta u'_{\bar{z}}(x_0, y_0) = Q_1, \quad u(x_0, y_0) = Q_0. \tag{3}$$

Здесь Q_0 и Q_1 – произвольные комплексные постоянные, а постоянные α и β удовлетворяют соотношению

$$\det\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Если a и b или c и d обращаются в нуль, то задача (1), (2) приводится к задаче Пуанкаре для уравнения (1) , которая для неправильно эллиптического уравнения (1) не является нетеровой (см. [1], [2]). Нетеровость общей локальной граничной задачи для системы (1) с действительными коэффициентами была исследована в [3]. В настоящей работе по коэффициентам уравнения (1) и граничного условия (2) определяются условия нетеровости задачи (1), (2), (3) а также описана эффективная процедура решения данной задачи.

Для формулировки полученных результатов преобразуем уравнение (1), используя комплексные операторы дифференцирования. Предполагается, что корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$ удовлетворяют условию $\Im\lambda_1 > 0$, $\Im\lambda_2 > 0$, то есть, уравнение неправильно эллиптическое. При этом уравнение (1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \nu\frac{\partial}{\partial z}\right)u = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{5}$$

где μ и ν такие комплексные числа, что $|\mu| < 1$ и $|\nu| < 1$ (имеем (см. [2] с. 188) $\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$ и $\nu = \frac{i-\lambda_2}{i+\lambda_2}$). В дальнейшем, вместо (1) будем использовать представление (5). В работе доказывается следующее предложение

Теорема 1. *Задача (5), (2), (3) является нетеровой тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.*

При выполнении условия теоремы 1 в явном виде определяются решения однородной (при $f \equiv 0$ и $Q_0 = Q_1 = 0$) задачи (1), (2), (3) и условия разрешимости неоднородной задачи.

§2. Граничная задача для уравнения (1), когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Рассмотрим задачу (5), (2), (3). В этом параграфе исследуем случай, когда корни характеристического уравнения простые.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mu \neq \nu$. В дальнейшем, при $|\delta| < 1$, будем обозначать $D(\delta) = \{z + \delta\bar{z} | z \in D\}$. Общее решение уравнения (5) представим в виде

$$u(x, y) = \Phi(z + \mu\bar{z}) + \Psi(z + \nu\bar{z}) + C_0, \quad (x, y) \in D, \tag{6}$$

где Φ и Ψ - функции, аналитические в областях $D(\mu)$ и $D(\nu)$ соответственно, удовлетворяющие соотношению $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$; C_0 – комплексная постоянная. Для определения функций Φ, Ψ, подставим (6) в граничное уравнение (2). Получим при $(x, y) \in \Gamma$

$$e\Phi'(z + \mu\bar{z}) + f\Psi'(z + \nu\bar{z}) + g\Phi'(\bar{z} + \mu z) + h\Psi'(\bar{z} + \nu z) = F(x, y), \quad z = x + iy. \tag{7}$$

Здесь

$$e = a + b\mu, \ f = a + b\nu, \ g = c + d\mu, \ h = c + d\nu. \tag{8}$$

Отметим, что так как $\Phi'(z + \mu\bar{z}) = (\mu - \nu)^{-1}(u'_{\bar{z}} - \nu u'_z)$, то функция Φ' удовлетворяет условию Гельдера на Γ , аналогичное условие верно для Ψ'. В монографии [1] доказано, что в этом случае функции Φ' и Ψ' можно представить на окружности Γ в виде

$$\Phi'(z + \mu\bar{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\bar{z}), \quad \Psi'(z + \nu\bar{z}) = \psi(z) + \psi(\nu\bar{z}), \quad z \in \Gamma. \tag{9}$$

Здесь ω и ψ - аналитические в D функции, по которым однозначно определяются Φ' и Ψ' . Разлагая эти функции в степенной ряд, получим ($z \in \Gamma$)

$$\Phi'(z + \mu\bar{z}) = 2A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu^k \bar{z}^k, \quad \Psi'(z + \nu\bar{z}) = 2B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \nu^k \bar{z}^k. \tag{10}$$

Функцию F также разложим в ряд Фурье на Γ

$$F(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^k.$$

Подставим эти разложения в граничное условие (2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z и $\bar{z}$. Получим одно уравнение для определения двух неизвестных A_0 и B_0

$$(e + g)A_0 + (f + d)B_0 = 0.5q_0. \tag{11}$$

При $k \geq 1$ получим систему двух уравнений для определения постоянных A_k, B_k:

$$\begin{aligned} (e + g\mu^k)A_k + (f + h\nu^k)B_k &= q_k, \\ (g + e\mu^k)A_k + (h + f\nu^k)B_k &= q_{-k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Если ввести обозначения

$$\Omega = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$$

то основная матрица системы (12) примет вид

$$X_k = \Omega + J\Omega\Lambda^k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

При $k \to \infty$, учитывая соотношения $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$, имеем

$$\det X_k \to \det \Omega = (ad - bc)(\nu - \mu).$$

Отсюда сразу следует, что условие теоремы 1 необходимо и достаточно для нетеровости краевой задачи (5), (2), (3). $\square$

Пусть это условие выполнено. Тогда $\det X_k$ может обратиться в ноль только для конечного множества значений k. Пусть $\det X_{k_0} = 0$. При этом необходимо $rank X_{k_0} = 1$. В этом случае однородная система (12) имеет одно линейно независимое решение. Каждому такому решению соответствует ненулевое решение однородной задачи (5), (2), (3), которое является многочленом порядка $k_0 + 1$. Далее, используя (11) и первое условие (3), для определения постоянных A_0 и B_0 получим систему

$$(e + g)A_0 + (f + d)B_0 = 0.5q_0,$$

$$(\alpha+\beta\mu)A_0+(\alpha+\beta\nu)B_0=0.5\left(Q_1-\sum_{k=1}^{\infty}A_kz_0^k-\sum_{k=1}^{\infty}A_k\mu^k\bar{z_0}^k-\sum_{k=1}^{\infty}B_kz_0^k-\sum_{k=1}^{\infty}B_k\nu^k\bar{z_0}^k\right).$$

Из (4) следует, что эта система однозначно разрешима. Постоянную C_0 определяем из второго условия (3).

Итак, получаем, что однородная задача (5), (2), (3)имеет

$$K=\sum_{k=1}^{\infty}(2-rankX_k) \tag{14}$$

линейно независимых решений. Для разрешимости соответствующей неоднородной задачи правая часть (2) – функция F – должна удовлетворять такому же количеству условий ортогональности. Таким образом, получена следующая теорема

Теорема 2. *При условии $ad-bc\neq 0$ задача (5), (2), (3) является фредгольмовой и количество линейно независимых решений соответствующей однородной задачи определяется по формуле (14).*

§3. Граничная задача в случае кратных корней характеристического уравнения

Теперь докажем теорему 1 в случае кратных корней.

1. Пусть $\mu=\nu\neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (1) можно представить в виде ([4])

$$u(x,y)=\Phi(z+\mu\bar{z})+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi(z+\mu\bar{z})+C_0. \tag{15}$$

Здесь Φ и Ψ - аналитические функции в области $D(\mu)$, такие, что $\Phi(0)=\Psi(0)=0$, $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ – оператор дифференцирования по аргументу $\varphi(z=re^{i\varphi})$, а C_0– постоянная,подлежащая определению. Отметим также, что если $u(x,y)$ определяется формулой (15), то

$$u(x,-y)=\Phi(\bar{z}+\mu z)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi(\bar{z}+\mu z)+C_0.$$

После подстановки функции (15) в граничное условие (2), используя соотношение для операторов $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ (см. [4])

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar{z}^m}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^l=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+(k-m)iI\right)^l\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar{z}^m}$$

получим

$$(a+b\mu)\Phi'(z+\mu\bar{z})+\left((a+b\mu)\frac{\partial}{\partial\varphi}+i(a-b\mu)I\right)\Psi'(z+\mu\bar{z})+$$
$$+(c+d\mu)\Phi'(\bar{z}+\mu z)-\left((c+d\mu)\frac{\partial}{\partial\varphi}-i(c-d\mu)I\right)\Psi'(\bar{z}+\mu z)=F(x,y) \tag{16}$$

при $(x,y)\in\Gamma$. Представим Φ' и Ψ' на окружности с помощью аналитических в круге функций ω и ψ по формуле (9). При этом, так как (9) верно на Γ, то

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi'(z+\mu\bar{z})=i(z\psi'(z)-\mu\bar{z}\psi'(\mu\bar{z})),\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi'(\bar{z}+\mu z)=i(-\bar{z}\psi'(\bar{z})+\mu z\psi'(\mu z)).$$

Разлагая функции ω и ψ в степенной ряд, получим выражение, аналогичное (10). Введем обозначения

$$e=a+b\mu,\quad f_0=a-b\mu,\quad g=c+d\mu,\quad h_0=c-d\mu.$$

Аналогично предыдущему случаю, подставляя разложения Тейлора в граничное условие (2), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z и $\bar{z}$, при $k\geq 1$ получим систему, аналогичную (12), для определения коэффициентов A_k и B_k :

$$(e+g\mu^k)A_k+i(ek+f_0+(h_0-gk)\mu^k)B_k=q_k,$$
$$(g+e\mu^k)A_k+i(gk+h_0+(f_0-ek)\mu^k)B_k=q_{-k}. \tag{17}$$

Для определения A_0 и B_0, как и в предыдущем случае, получаем уравнение, аналогичное (11):

$$(e+g)A_0+i(f_0+h_0)B_0=0.5q_0. \tag{18}$$

Матрица X_{0k} системы (17) имеет вид

$$X_{0k} = \begin{pmatrix} e & i(ek+f_0) \\ g & i(gk+h_0) \end{pmatrix} + \mu^k \begin{pmatrix} g & i(h_0-gk) \\ e & i(f_0-ek) \end{pmatrix} \equiv P_k + \mu^k W_k. \tag{19}$$

Так как второе слагаемое в (19) стремится к нулю со скоростью бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|\mu| < 1$), и $\det P_k = -2i\mu(ad-bc)$, то задача (5), (2), (3) будет нетеровой тогда и только тогда, когда выполняется условие теоремы 1. Теорема 1 верна и в этом случае. Далее, если $ad-bc \neq 0$, то $rankX_{0k} < 2$ только для конечного числа k. Если при некотором k_0 $rankX_{0k_0} = 1$, то однородная система (17) имеет ненулевое решение, которому соответствует нетривиальное решение однородной задачи (5), (2), (3). При этом возникает условие разрешимости соответствующей неоднородной задачи (связь между q_{k_0} и q_{-k_0}). Определив A_k и B_k, коэффициенты A_0 и B_0 и постоянную C_0 так же, как и в случае простых корней, используя (4), однозначно определяем из (18) и (3). Итак, получена следующая

Теорема 3. *Если в (5) $\mu = \nu \neq 0$, то при условии теоремы 1 задача (5), (2), (3) является фредгольмовой и количество K линейно независимых решений соответствующей однородной задачи определяется по формуле*

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} (2 - rankX_{0k}).$$

Пусть теперь $\mu = \nu = 0$. В этом случае аналогично доказываем теорему 1, а также следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть выполнено условие теоремы 1 и $\mu = \nu = 0$. При условии*

$$ad - bc \neq c^2 - a^2, \tag{20}$$

задача (5), (2), (3) однозначно разрешима. Если это условие не выполнено, то для разрешимости неоднородной задачи (5), (2), (3) необходимо и достаточно, чтобы граничная функция F удовлетворяла одному условию ортогональности. Соответствующая однородная задача при этом имеет одно линейно независимое решение.

§4. Частный случай граничной задачи (1), (2), (3)

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим частный случай граничной задачи (1), (2), (3). Пусть функция u – решение уравнения (1) – на границе Γ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - r\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) = F(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{21}$$

Здесь r – постоянная, а F удовлетворяет условию Гельдера на Γ. Выясним, какой вид примут результаты предыдущих параграфов для граничной задачи (1), (21), (3). Для формулировки соответствующих результатов отметим, что условие (2) совпадает с (21) при

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -ri, \quad d = ri. \tag{22}$$

Следовательно, теорема 1 примет вид

Теорема 5. *Задача (5), (21), (3) является нетеровой тогда и только тогда, когда $r \neq 0$.*

Далее, условие (20) принимает вид

$$r^2 + 2ir + 1 \neq 0, \tag{23}$$

и, следовательно, результат, аналогичный теореме 4 формулируется следующим образом:

Теорема 6. *Пусть $r \neq 0$ и $\mu = \nu = 0$. При $r \neq -i(1 \pm \sqrt{2})$ задача (5), (21), (3) однозначно разрешима. Если $r = -i(1 \pm \sqrt{2})$, то для разрешимости неоднородной задачи (5), (21), (3) необходимо и достаточно, чтобы граничная функция F удовлетворяла одному условию ортогональности. Соответствующая однородная задача при этом имеет одно линейно независимое решение.*

Теперь исследуем вопрос однозначной разрешимости задачи (5), (21), (3). Из теорем 2 и 3 следует, что для однозначной разрешимости задачи (5), (21), (3) необходима и достаточна невырожденность матриц X_k и X_{0k} при $k = 1, 2, \ldots$. Используя равенства

$$\det X_k = (eh - gf)(1 - \mu^k \nu^k) + (ef - gh)(\nu^k - \mu^k),$$
$$\det X_{0k} = i((eh_0 - gf_0)(1 - \mu^{2k}) - 2(e^2 - g^2)k\mu^k),$$

а также то, что из (22) и (8) следуют соотношения

$$e = 1 + \mu, \quad f = 1 + \nu, \quad f_0 = 1 - \mu,$$
$$g = -ri(1 - \mu), \quad h = -ri(1 - \nu), \quad h_0 = -ri(1 + \mu), \tag{24}$$

получаем следующую теорему

Теорема 7. *Пусть $r \neq 0$. Задача (5), (21), (3) при $\mu \neq \nu$ однозначно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$(1 - \mu)(1 - \nu)(\nu^k - \mu^k)r^2 + 2i(\nu - \mu)(1 - \mu^k \nu^k)r + (1 + \mu)(1 + \nu)(\nu^k - \mu^k) \neq 0, \tag{25}$$

при $k = 1, 2, \ldots$. Если $\mu = \nu \neq 0$, то для однозначной разрешимости задачи (5), (21), (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$(1 - \mu)^2 k\mu^{k-1} r^2 + 2i(1 - \mu^{2k})r + (1 + \mu)^2 k\mu^{k-1} \neq 0, \tag{26}$$

при $k = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим уравнение (25). Если $\mu^k = \nu^k$, то это уравнение не имеет отличных от нуля решений. Если же $\mu^k \neq \nu^k$, то (25) имеет два отличных от нуля решения. Обозначим M – множество отличных от нуля решений этого уравнения при $k = 1, 2, \ldots$. Из (25) следует, что M представляет собой последовательность $\{r_k\}_1^\infty$ такую, что $|r_{2k+1}| \to 0$, а $|r_{2k}| \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть N – множество ненулевых точек комплексной плоскости не принадлежащих M. В случае $\mu = \nu \neq 0$ множества M и N определяем аналогично, используя уравнение (26) (это уравнение при всех $k \geq 1$ имеет два ненулевых решения и последовательность $\{r_k\}_1^\infty$ имеет то же свойство). И в случае $\mu = \nu = 0$ из теоремы 6 имеем, что $M = \{-i(1 \pm \sqrt{2})\}$.

Итак, окончательно получаем, что задача (5), (21), (3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $r \in N$.

Рассмотрим общее граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + p\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - r\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) = F(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{27}$$

Предположим, что $r \neq 0$ и выясним, для каких r при фиксированном p задача (5), (27), (3) однозначно разрешима. Для этого отметим, что условие (2) совпадает с (27) при

$$a = 1 + pi, \quad b = 1 - pi, \quad c = -ri, \quad d = ri. \tag{28}$$

Следовательно, используя представление для $\det X_k$ и $\det X_{0k}$, получаем теорему, аналогичную теореме 7

Теорема 8. *Пусть $r \neq 0$. Задача (5), (27), (3) при $\mu \neq \nu$ однозначно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$(1 - \mu)(1 - \nu)(\nu^k - \mu^k)r^2 + 2i(\nu - \mu)(1 - \mu^k \nu^k)r + (1 + \mu + pi(1 - \mu))\times$$
$$\times(1 + \nu + pi(1 - \nu))(\nu^k - \mu^k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Если $\mu = \nu \neq 0$, то для однозначной разрешимости задачи (5), (27), (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$(1 - \mu)^2 k\mu^{k-1} r^2 + 2i(1 - \mu^{2k})r + (1 + \mu + pi(1 - \mu))^2 k\mu^{k-1} \neq 0, \tag{30}$$

при $k = 1, 2, \ldots$. При $\mu = \nu = 0$ для однозначной разрешимости задачи (5), (27), (3) необходимо и достаточно условие (23).

В этом случае также можно определить множество N_p точек r таких, что при фиксированном p задача (5), (27), (3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $r \in N_p$. Из (29) и (30) следует, что N_p при любом p имеет структуру множества N. Отметим также, что при $\mu = \nu = 0$ условия однозначной разрешимости не зависят от p.

Список литературы

[1] N.E.Tovmasyan, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Singapore 1998.

[2] А.В.Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Москва, Наука, 1966, 204 с.

[3] Н.Е.Товмасян, Общая граничная задача для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, Труды Тбилисского матем. института АН Груз.ССР им. А. М. Размадзе, т.33, 1967, с.93-111.

[4] А.О.Бабаян, О задаче Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге. Известия АН Армении, серия математика, т. 38, №6, 2003, с.16-26.

ТОВМАСЯН Н.Е., ПРОФЕССОР, ЧЛ.КОРР. НАН АРМЕНИИ, ГИУА, ДЕПАРТАМЕНТ МАТЕМАТИКИ, ЕРЕВАН 375009, УЛ. ТЕРЯНА 105, АРМЕНИЯ.

E-mail: armenak@web.am

БАБАЯН А.О., К.Ф.-М.Н. ДОЦЕНТ, ГИУА, ДЕПАРТАМЕНТ МАТЕМАТИКИ, ЕРЕВАН 375009, УЛ. ТЕРЯНА 105, АРМЕНИЯ.

E-mail: armenak@web.am

НОРМАЛЬНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ДВУМЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ПЕРЕМЕННЫХ

Варфоломеев Е.М.
Российский университет дружбы народов,
Москва, Россия

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают различные регулярные периодические явления, которые называют “многолепестковыми волнами” [1, 2]. Эти световые структуры используются в современных компьютерных технологиях для создания оптических аналогов нейронных сетей. Математическая модель указанной системы описывается бифуркацией периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных $g(x)$. В работах [3, 4] эта задача рассматривалась в случае, когда область Q — круг или кольцо, а преобразование g — вращение на некоторый угол θ. Случай, когда область $Q \subset \mathbb{R}^2$ и преобразование g произвольны, рассматривался в работах [5, 6]. В этих статьях предполагалось, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор — нормальный. В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия нормальности указанного оператора в терминах области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и преобразования g. Более общий случай без предположения нормальности линеаризованного эллиптического оператора рассмотрен в работе [8].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного оператора в случае двух преобразований пространственных переменных.

1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \subset C^\infty$, $n \geq 2$. Пусть g, f — взаимно однозначные преобразования класса C^3, такие что

$$g : V \subset \mathbb{R}^n \to g(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_g(x)| \neq 0,\ x \in V;$$
$$f : V \subset \mathbb{R}^n \to f(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_f(x)| \neq 0,\ x \in V.$$

Здесь V — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_g(x) = [\partial g_i/\partial x_j]_{i,j=1}^n$ — матрица Якоби преобразования g, $|J_g(x)| = |\det J_g(x)|$. Пусть также выполнено

$$g(Q) \subset Q, \quad f(Q) \subset Q. \tag{1}$$

Рассмотрим неограниченный оператор $A_0 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ с областью определения $D(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$, действующий по формуле $A_0 v = \Delta v,\ v \in D(A_0)$. Здесь $W_2^k(Q)$ — пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными до порядка k включительно, $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v/\partial \nu)|_{\partial Q}$, ν — единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$. Как известно, A_0 — самосопряженный оператор. Положим $A : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $A = A_0 + A_1 + A_2$, где A_1, A_2 — линейные ограниченные операторы, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ следующим образом:

$$A_1 : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_1 v(x) = a_1 v(g(x)),$$
$$A_2 : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad A_2 v(x) = a_2 v(f(x)),$$

где $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$ — вещественные числа.

Оператор A называется нормальным, если $D(AA^*) = D(A^*A)$ и $AA^*v = A^*Av$ для любого $v \in D(A^*A)$. Положим $D(A) = D(A_0)$.

Определим множества $G_g^m = \{x \in Q : g^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Здесь $g^m(x)$ обозначает преобразование g, примененное m раз. Обозначим $\widetilde{G}_g^m = Q \backslash G_g^m$. Будем также записывать суперпозицию преобразований в виде $fg(x)$, $g^{-1}f(x)$ и т. п.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$, $G_f^2 \neq \varnothing$. Кроме того, пусть $g(Q) = f(Q) = Q$ и $|a_1| \neq |a_2|$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы:*

$$\begin{aligned} &g(x) = Kx + b, \quad f(x) = Cx + d, \quad x \in Q, \\ &gf(x) = fg(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{2}$$

где K, C — ортогональные матрицы порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $C^2 \neq E$, $b, d \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть $G_g^2 = \varnothing$, $G_f^2 = \varnothing$. Тогда $g(Q) = f(Q) = Q$, а также:*

(1) *Если оператор A — нормальный и выполнено $a_1 + a_2 \neq 0$, то*

$$\begin{cases} a_1^2\left(|J_g(x)| - |J_g(x)|^{-1}\right) + a_2^2\left(|J_f(x)| - |J_f(x)|^{-1}\right) = 0, & x \in G_g^1 \cap G_f^1, \\ |J_g(x)| = |J_f(x)| = 1, & x \in Q \setminus (G_g^1 \cap G_f^1). \end{cases}$$

(2) *Если $|J_g(x)| = |J_f(x)| = 1$, $x \in Q$, то A — нормальный, самосопряженный оператор.*

Теорема 3. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$, $G_f^2 = \varnothing$. Кроме того, пусть $g(Q) = Q$. Тогда $f(Q) = Q$, и для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы:*

$$\begin{aligned} &g(x) = Kx + b, \quad |J_f(x)| = 1, \quad x \in Q, \\ &gf(x) = fg(x), \quad x \in Q, \end{aligned} \tag{3}$$

где K — ортогональная матрица порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

3. Комментарии

Для доказательства этих теорем использованы методы, примененные в работе [7]. Наличие двух преобразований переменных существенно усложняет задачу. Потребовалось рассмотреть различные свойства преобразований g и f, в частности, свойства группы преобразований, порожденных ими. Доказательства приведенных теорем будут опубликованы в журнале “Functional Differential Equations” в 2006 году.

В работе [7] были получены следующие необходимые и достаточные условия нормальности оператора A для случая одного преобразования переменных (т. е. при $a_2 = 0$).

Теорема 4. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы*

$$g(Q) = Q, \quad g(x) = Kx + b, \quad x \in Q,$$

где K — ортогональная матрица порядка $n \times n$ и $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 5. *Пусть $G_g^2 = \varnothing$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы*

$$g(Q) = Q, \quad |J_g(x)| \equiv 1, \quad x \in Q.$$

Более того, если A — нормальный оператор, то он является самосопряженным.

Полученные в настоящей работе теоремы 1–3 при некоторых дополнительных условиях обобщают теоремы 4 и 5. Рассмотрим примеры, показывающие, что наложенные дополнительные условия являются существенными.

Пример 1. Условие $a_1 + a_2 \neq 0$ является существенным в теоремах 1 и 2 (в теореме 1 оно входит в условие $|a_1| \neq |a_2|$, что эквивалентно $a_1 + a_2 \neq 0$, $a_1 - a_2 \neq 0$). Действительно, если $a_1 + a_2 = 0$, то любые (нелинейные) преобразования g и f такие, что $g(x) = f(x)$, $x \in Q$, порождают нормальный (и самосопряженный) оператор $Au(x) = \Delta u(x)$.

Лемма 1. *Сопряженный оператор A_1^* определяется по формуле*

$$A_1^* v(x) = \begin{cases} a_1 |J_{g^{-1}}(x)| v(g^{-1}(x)) & \text{при } x \in g(Q), \\ 0 & \text{при } x \in Q \setminus g(Q), \end{cases}$$

где $J_{g^{-1}}(x)$ — матрица Якоби преобразования g^{-1}.

Доказательство очевидно; достаточно заменить переменную интегрирования при скалярном умножении в $L_2(Q)$. Сопряженный оператор A_2^* определяется аналогично.

Замечание 1. Так как $D(A_0) = D(A_0^*)$, а линейные операторы $A_k, A_k^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограничены, $k = 1, 2$, имеем $D(A) = D(A^*) = D(A_0)$.

Пример 2. Условие $a_1 - a_2 \neq 0$ существенно в теореме 1. Пусть имеет место $a_1 - a_2 = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = a$. Возьмем взаимно однозначное преобразование g такое, что $g(Q) = Q$ и $|J_g(x)| \equiv 1$ при $x \in Q$. Тогда $|J_{g^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Выберем преобразование $f(x) = g^{-1}(x)$, $x \in Q$. Тогда $f(Q) = Q$ и $|J_f(x)| \equiv |J_{f^{-1}}(x)| \equiv 1$, $x \in Q$. Используя лемму 1, получим для $v \in D(A)$, $x \in Q$:

$$A^*v(x) = A_0^*v(x) + A_1^*v(x) + A_2^*v(x) = \Delta v(x) + a|J_{g^{-1}}(x)|v(g^{-1}(x)) + a|J_{f^{-1}}(x)|v(f^{-1}(x)) = \\ = \Delta v(x) + av(f(x)) + av(g(x)) = Av(x).$$

Оператор A оказывается самосопряженным, а значит, нормальным. Осталось показать, что выбранные преобразования g и f могут не иметь вид (2). Действительно, рассмотрим преобразование единичного круга $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ типа квази-поворота:

$$g : (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2), \qquad \begin{cases} y_1 = r\cos(\hat{g}(r, \varphi)) \\ y_2 = r\sin(\hat{g}(r, \varphi)). \end{cases},$$

Здесь (x_1, x_2) и (y_1, y_2) — декартовы координаты единичного круга до и после преобразования g; r и φ — полярные координаты, соответствующие декартовым координатам (x_1, x_2). Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$, легко показать, что $J_g(r, \varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{g}(r, \varphi)$. Выберем

$$\hat{g}(r, \varphi) = \varphi + r.$$

Тогда получим $J_g(r, \varphi) \equiv 1$. Очевидно, построенное преобразование взаимно однозначно, $g(Q) = Q$, причем обратное преобразование $g^{-1}(x)$ определяется функцией $\hat{g}(r, \varphi) = \varphi - r$. Легко убедиться, что $g \in C^3$. Таким образом, при условии $a_1 - a_2 = 0$ построены преобразования g и $f = g^{-1}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1 и не имеющие вид (2), такие, что оператор A является нормальным. Следовательно, условие $a_1 - a_2 \neq 0$ существенно в теореме 1.

Лемма 2. *Пусть $g(Q) = f(Q) = Q$, и для любого $x \in Q$ выполнено*

$$|J_{g^{-1}}(x)| = |J_{g^{-1}}(g(x))|, \qquad |J_{f^{-1}}(x)| = |J_{f^{-1}}(f(x))|,$$
$$|J_{g^{-1}}(x)| = |J_{g^{-1}}(f(x))|, \qquad |J_{f^{-1}}(x)| = |J_{f^{-1}}(g(x))|,$$
$$fg(x) = gf(x).$$

Тогда $A_1 + A_2$ — нормальный оператор.

Доказательство. Применяя лемму 1, для любой функции $v(x) \in L_2(Q)$ получим:

$$A_1A_1^*v(x) = a_1^2|J_{g^{-1}}(g(x))|v(x), \qquad A_1^*A_1v(x) = a_1^2|J_{g^{-1}}(x)|v(x),$$
$$A_2A_2^*v(x) = a_2^2|J_{f^{-1}}(f(x))|v(x), \qquad A_2^*A_2v(x) = a_2^2|J_{f^{-1}}(x)|v(x),$$
$$A_1A_2^*v(x) = a_1a_2|J_{f^{-1}}(g(x))|v(f^{-1}g(x)), \qquad A_2^*A_1v(x) = a_1a_2|J_{f^{-1}}(x)|v(gf^{-1}(x)),$$
$$A_2A_1^*v(x) = a_1a_2|J_{g^{-1}}(f(x))|v(g^{-1}f(x)), \qquad A_1^*A_2v(x) = a_1a_2|J_{g^{-1}}(x)|v(fg^{-1}(x)).$$

Из соотношений $fg(x) = gf(x)$ и $g(Q) = f(Q) = Q$ следует, что $f^{-1}g(x) = gf^{-1}(x)$, $fg^{-1}(x) = g^{-1}f(x)$, $f^{-1}g^{-1}(x) = g^{-1}f^{-1}(x)$ при $x \in Q$. Отсюда, учитывая требование равенства якобианов, имеем

$$(A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*)\, v(x) = (A_1^* + A_2^*)(A_1 + A_2)\, v(x), \quad v(x) \in L_2(Q),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Рассмотрим пример, демонстрирующий отсутствие нормальности оператора $A_1 + A_2$ при некоммутативных преобразованиях g, f. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}$, а g, f суть преобразования поворота вокруг осей x_1, x_2, соответственно:

$$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Положим $\varphi = \psi = \pi/3$ и зафиксируем $x^0 = (0,\ 0,\ 1)^T$. Получим (см. рис. 1):

$$f^{-1}g(x^0) = f^{-1}(0,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/4,\ -\sqrt{3}/2,\ 1/4)^T,$$
$$gf^{-1}(x^0) = g(\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (\sqrt{3}/2,\ -\sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$g^{-1}f(x^0) = g^{-1}(-\sqrt{3}/2,\ 0,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/2,\ \sqrt{3}/4,\ 1/4)^T,$$
$$fg^{-1}(x^0) = f(0,\ \sqrt{3}/2,\ 1/2)^T = (-\sqrt{3}/4,\ \sqrt{3}/2,\ 1/4)^T.$$

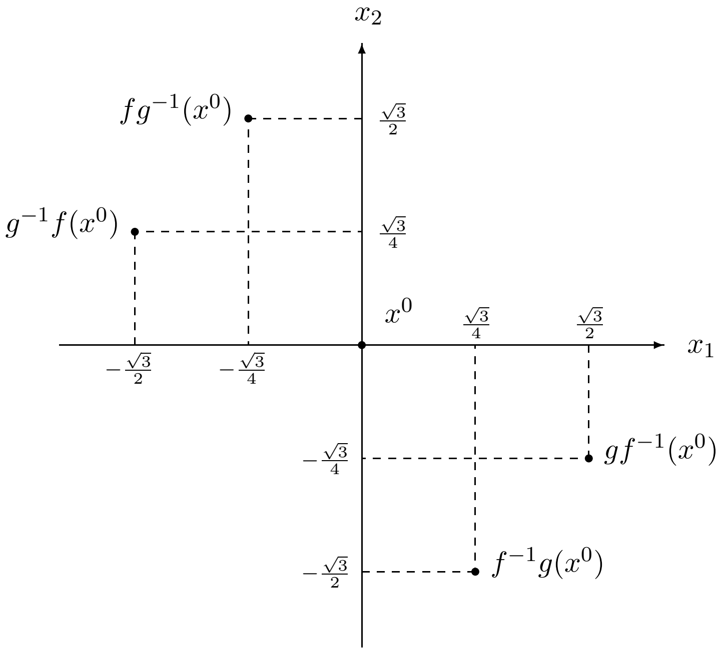

Рис. 1

Все условия леммы 2, кроме условия коммутативности преобразований g и f, выполнены. Тогда по доказательству леммы 2, нормальность оператора $A_1 + A_2$ эквивалентна соотношению

$$v(f^{-1}g(x)) + v(g^{-1}f(x)) = v(fg^{-1}(x)) + v(gf^{-1}(x)) \tag{4}$$

для любых $v \in L_2(Q)$ и почти всех $x \in Q$. Выберем $x = x^0$. Очевидно, тогда существуют функции $v \in L_2(Q)$, для которых равенство (4) не выполняется. Следовательно, оператор $A_1 + A_2$ не является нормальным. Значит, условие $fg(x) = gf(x)$ в лемме 2 существенно.

Лемма 3. *Пусть $G_g^2 \neq \varnothing$, $G_f^2 \neq \varnothing$, $g(Q) = f(Q) = Q$ и преобразования $g(x), f(x)$ имеют вид* (2), *а также выполнено $fg(x) = gf(x)$ для всех $x \in Q$. Тогда оператор A нормален.*

Доказательство. По определению, $D(A) = \{u \in W_2^2(Q) : Bu = 0\}$. Следовательно, из условия леммы вытекает, что $A_1u, A_2u, A_1^*u, A_2^*u \in D(A)$, если $u \in D(A)$. Поэтому по теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений вблизи границы ([9], гл. 2, §5, теорема 5.1) мы получим $D(AA^*) = D(A^*A) = \{u \in W_2^4(Q) : Bu = B\Delta u = 0\}$.

В силу леммы 2 остается доказать, что

$$A_0(A_1 + A_2)u + (A_1^* + A_2^*)A_0u = (A_1 + A_2)A_0u + A_0(A_1^* + A_2^*)u, \quad u \in D(AA^*). \tag{5}$$

Это равенство доказывается исходя из того, что преобразования g и f имеют вид (2), учитывая некоторые другие результаты, полученные при доказательстве теорем 1–3.

Пример 4. Покажем, что оператор A не является нормальным при нарушении условия коммутативности преобразований g и f в лемме 3. Рассмотрим область Q и преобразования g и f, построенные в примере 3. Для такого случая выполнены все условия леммы 3, кроме условия коммутативности преобразований. Положим

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)\xi(x),$$

где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ — срезающая функция такая, что $0 \le \xi \le 1$, $\xi(x) = 1$ при $x \in Q_{2\varepsilon}$ и $\xi(x) = 0$ при $x \notin Q_\varepsilon$. (Здесь $Q_\varepsilon \subset Q$ и $\operatorname{dist}(\partial Q_\varepsilon, \partial Q) > \varepsilon$.) Очевидно, $u \in \mathcal{D}(AA^*)$, а левая и правая части равенства (5) обращаются в нуль. Тогда нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2$. Поскольку все условия леммы 2, кроме условия коммутативности, также выполнены, то, как показано в примере 3, нормальность оператора $A_1 + A_2$ эквивалентна выполнению равенства (4) при всех $v \in L_2(Q)$, $x \in Q$. Очевидно, что $u \in L_2(Q)$. Выбрав $x = (0,\ 0,\ 1)^T$ и учитывая построения, приведенные в примере 3, получим нарушение равенства (4). Следовательно, оператор A не является нормальным. Таким образом, условие $fg(x) = gf(x)$ $(x \in Q)$ в лемме 3 и теореме 1 существенно.

Автор глубоко благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к этой работе и ценные советы.

Список литературы

[1] *Vorontsov M. A., Ivanov V.Yu., and Smalhausen V.I.* Rotary instability in the spatial structure of light fields in nonlinear media with two-dimensional feedback// Laser Optics in Condensed Matter. — 1988. — 507–517.

[2] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., and Abernathy R. L.* Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos, Solitons and Fractals. — 1994. — **4**. — 1701–1716.

[3] *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом// Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1993. — **33**, № 1. — 69–80.

[4] *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics, Rajarshi Roy ed., Proceedings SPIE 2039. — 1993. — 342–352.

[5] *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. — 1996. — **51**, вып. 1(307). — 169–170.

[6] *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics// Nonlinear Analisys. — 1998. — **32**, № 2. — 261–278.

[7] *Скубачевский А. Л.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Функциональный анализ и его приложения. — 1997. — **31**, вып. 4. — 60–65.

[8] *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравнения. — 1998. — **34**, № 10. — 1394–1401.

[9] *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1972.

УДК 517.96

КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА ЗАМКНУТОЙ СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

Васильева Ю.В., Плакса С.А.
Институт Математики,
Киев, Украина

Расширены классы замкнутых жордановых спрямляемых кривых и заданных функций в теории кусочно-непрерыной краевой задачи Римана и связанного с ней характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.

1. Постановка задачи

Пусть γ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, D^+ и D^- соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные кривой γ, при этом $0 \in D^+$. Обозначим через $T := \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ фиксированный конечный набор точек кривой γ.

Пусть множество $H_T^{\pm}$ включает в себя голоморфные в области $D^{\pm}$ функции F (имеющие также предел в бесконечно удаленной точке в случае класса H_T^-), которые непрерывно продолжаются на $\gamma \setminus T$ и допускают оценку

$$|F(z)| \le c \sum_{j=1}^{m} |z-a_j|^{-\nu_F} \qquad \forall\, z \in D^{\pm}, \tag{1}$$

где постоянная c не зависит от z, а ν_F – некоторое число из промежутка $(0;1)$, зависящее от функции F.

Рассмотрим кусочно-непрерывную краевую задачу Римана об отыскании функций $\Phi^+ \in H_T^+$ и $\Phi^- \in H_T^-$, удовлетворяющих условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \tag{2}$$

где G и g — заданные функции. При $g(t) \not\equiv 0$ имеем неоднородную краевую задачу Римана, а при $g(t) \equiv 0$ – однородную краевую задачу Римана.

В данной работе расширяются классы замкнутых жордановых спрямляемых кривых и заданных функций в теории кусочно-непрерывной краевой задачи Римана, которая изучалась ранее в работах [1 – 9].

2. Однородная задача

Обозначим $\gamma_\varepsilon(X) := \bigcup\limits_{x\in X} \{t \in \gamma : |t-x| \le \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и $X \subset \mathbb{C}$. Если $X = \{x\}$, то множество $\gamma_\varepsilon(X)$ обозначим через $\gamma_\varepsilon(x)$.

Все интегралы по кривой γ понимаются в смысле их главного значения, т.е.

$$\int\limits_{\gamma} \varphi(t)\, dt := \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(X)} \varphi(t)\, dt\,,$$

где X – конечное множество точек разрыва функции φ.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\widetilde{p}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{p(t)}{t-z}\, dt\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma\,. \tag{3}$$

Если функция p суммируема на γ или $p \in H_T := H_T^+ + H_T^-$, то функция $\widetilde{p}$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

В каждой точке $a_j \in T$ определим числа

$$\Delta_p(a_j) := \liminf_{z\to a_j,\, z\in\mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{\operatorname{Re}\widetilde{p}\,(z)}{\ln|z-a_j|}\,,$$

$$\Delta^p(a_j) := \liminf_{r\to 0} \frac{1}{\ln r} \inf_{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma:\, |z-a_j|=r} \operatorname{Re}\widetilde{p}\,(z)$$

и, кроме того, предположим, что выполняется соотношение

$$\Delta^p(a_j) \le \Delta_p(a_j) + c \qquad \forall\, a_j \in T\,, \tag{4}$$

где c – некоторая постоянная.

Соотношение (4) означает, что в каждой точке $a_j \in T$ либо $\Delta^p(a_j) = \Delta_p(a_j) = +\infty$, либо $\Delta^p(a_j) = \Delta_p(a_j) = -\infty$, либо числа $\Delta^p(a_j)$ и $\Delta_p(a_j)$ конечны.

Определим *индекс* æ кусочно-непрерывной краевой задачи Римана следующим образом. Если числа $\Delta^p(a_j)$ и $\Delta_p(a_j)$ конечны для всех $a_j \in T$, то полагаем

$$æ := \sum_{j=1}^{m} æ_j\,,$$

где

$$æ_j := \begin{cases} \Delta_p(a_j)\,, & \text{если } \Delta_p(a_j) \text{ целое,} \\ [\Delta_p(a_j)] + 1\,, & \text{если } \Delta_p(a_j) \text{ нецелое.} \end{cases}$$

В случае, если среди значений $\Delta_p(a_j)$ есть $+\infty$, но нет $-\infty$, полагаем, что $æ = +\infty$. Наконец, в случае, если среди значений $\Delta_p(a_j)$ есть $-\infty$, полагаем, что $æ = -\infty$.

Следующая теорема доказывается по схеме, изложенной в [4, с. 46], и является обобщением теоремы 1 из [7].

Теорема 1. *Пусть γ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая и функция G имеет вид $G(t) = \exp(p(t))$, где $p \in H_T$ и, кроме того, выполняется соотношение (4). Тогда:*

1) если $-\infty \le æ < 0$, то однородная краевая задача Римана не имеет нетривиальных решений;

2) если $æ = +\infty$, то однородная краевая задача Римана имеет бесконечное множество линейно независимых решений;

3) если $0 \le æ < \infty$, то однородная краевая задача Римана имеет $æ + 1$ линейно независимых решений и ее общее решение дается формулой

$$\Phi^{\pm}(z) = \exp(\widetilde{p}\,(z)) P_{æ}(z) \prod_{j=1}^{m} (z - a_j)^{-æ_j}\,, \qquad z \in D^{\pm}\,,$$

где $P_{æ}$ – произвольный полином степени не выше æ.

3. Неоднородная задача

Рассмотрим неоднородную краевую задачу Римана в случае конечного индекса при дополнительном предположении о том, что при всех $a_j \in T$ конечны числа

$$\Delta_p^*(a_j) := \limsup_{z \to a_j,\, z \in \mathbb{C}\setminus\gamma} \frac{\operatorname{Re} \widetilde{p}\,(z)}{\ln|z - a_j|}\,.$$

Используем следующую метрическую характеристику (см. [10]) кривой γ:

$$\theta(\varepsilon) := \sup_{z \in \gamma}\ \theta_z(\varepsilon)\,,$$

где $\theta_z(\varepsilon) := \operatorname{mes}\{t \in \gamma : |t - z| \le \varepsilon\}$, а mes обозначает линейную меру Лебега на γ.

Для функции q, заданной на $\gamma \setminus T$, и точки $x \in \gamma \setminus T$ введем локальный центрированный модуль гладкости первого порядка (см. [7]):

$$\Omega_x(q, \gamma, \varepsilon) := \begin{cases} \sup\limits_{t \in \gamma\,:\,|t-x| = \varepsilon} |q(t) - q(x)|\,, & \text{если } \{t \in \gamma : |t - x| = \varepsilon\} \ne \varnothing\,, \\ 0\,, & \text{если } \{t \in \gamma : |t - x| = \varepsilon\} = \varnothing\,, \end{cases}$$

который в отличие от модуля непрерывности не является монотонной функцией от ε и поэтому учитывает возможные колебания функции q. Заметим, что функция q непрерывна в точке x тогда и только тогда, когда $\Omega_x(q, \gamma, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $\widetilde{p}^{\,+}(x)$, $\widetilde{p}^{\,-}(x)$ предельные значения в точке $x \in \gamma \setminus T$ функции (3) соответственно из областей D^+, D^-.

Следующая теорема описывает разрешимость неоднородной краевой задачи Римана с конечным индексом при минимальных предположениях о коэффициенте G задачи.

Теорема 2. *Пусть γ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию*

$$\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\nu}), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{5}$$

где $0 < \nu \leq 1$; функция G представима в виде $G(t) = \exp(p(t))$, где $p \in H_T$, и для всех $a_j \in T$ конечны числа $\Delta_p(a_j)$, $\Delta^*_p(a_j)$; функция g представима в виде $g = g^+ + g^-$, где $g^+ \in \mathcal{H}^+_T$, а функция g^- голоморфна в D^-, непрерывна на $\overline{D^-} \setminus T$, удовлетворяет условию

$$\sup_{x\in\gamma\setminus\gamma_\delta(T)} \int\limits_{[0,\varepsilon]} \frac{\Omega_x(g^-,\gamma,\eta)}{\eta}\, d\theta_x(\eta) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0 \tag{6}$$

и оценкам

$$|g^-(t)| \leq c \prod_{j=1}^{m} |t-a_j|^{\alpha_j} \qquad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \ \ \alpha_j > \Delta^*_p - \Delta_p - \nu\,, \tag{7}$$

$$\int\limits_{[0,r_t]} \frac{\Omega_t(g^-,\gamma,\eta)}{\eta}\, d\theta_t(\eta) \leq c \prod_{j=1}^{m} |t-a_j|^{\beta_j} \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T, \ \ \beta_j > \Delta^*_p - \Delta_p - 1\,, \tag{8}$$

где постоянная c не зависит от t.

Тогда при $æ \geq -1$ неоднородная краевая задача Римана разрешима, а при $æ < -1$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение $-æ-1$ условий:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{g(t)}{\exp(\widetilde{p}^+(t))} \prod_{j=1}^{m} (t-a_j)^{æ_j}\, t^{s-1}\, dt \,=\, 0\,, \qquad s = 1, 2, ..., -æ-1\,. \tag{9}$$

Общее решение неоднородной краевой задачи Римана дается формулой

$$\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0(z) + \exp(\widetilde{p}(z))\ P_æ(z) \prod_{j=1}^{m} (z-a_j)^{-æ_j}\,, \qquad z \in D^{\pm}, \tag{10}$$

где

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} g^+(z) + \widehat{\Phi}(z), & \textit{если} \quad z \in D^+, \\ \widehat{\Phi}(z), & \textit{если} \quad z \in D^-, \end{cases}$$

$$\widehat{\Phi}(z) = \prod_{j=1}^{m} (z-a_j)^{-æ_j} \exp(\widetilde{p}(z))\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g^-(t)}{\exp(\widetilde{p}^+(t)) \prod\limits_{j=1}^{m} (t-a_j)^{-æ_j}}\ \frac{dt}{t-z}\,,$$

а $P_æ$ — произвольный полином степени не выше $æ$, если $æ \geq 0$, и $P_æ(z) \equiv 0$, если $æ < 0$.

Доказательство. С учетом равенств $g(t) = g^+(t) + g^-(t)$ и $G(t) = \exp(\widetilde{p}^+(t) - \widetilde{p}^-(t))$, которые выполняются при всех $t \in \gamma \setminus T$, перепишем краевое условие (2) в виде

$$\frac{(\Phi^+(t) - g^+(t)) \prod\limits_{j=1}^{m} (t-a_j)^{æ_j}}{\exp(\widetilde{p}^+(t))} = \frac{\Phi^-(t) \prod\limits_{j=1}^{m} (t-a_j)^{æ_j}}{\exp(\widetilde{p}^-(t))} + \frac{g^-(t) \prod\limits_{j=1}^{m} (t-a_j)^{æ_j}}{\exp(\widetilde{p}^+(t))}\,.$$

Обозначим $F^+(t) := \exp(-\widetilde{p}^+(t)) \prod\limits_{j=1}^{m} (t-a_j)^{æ_j}$.

При $\varepsilon > 0$ и всех $t \in \gamma \setminus T$ достаточно близких к $a_j \in T$, функция F^+ удовлетворяет неравенству

$$|F^+(t)| \,\leq\, c\, |t-a_j|^{æ_j - \Delta^*_p(a_j) - \varepsilon},$$

следствием которого и неравенства (7) является оценка

$$|g^-(t)\ F^+(t)| \,\leq\, c\, |t-a_j|^{\alpha_j + æ_j - \Delta^*_p(a_j) - \varepsilon}\,,$$

где через c обозначены различные постоянные, не зависящие от t. Кроме того, при достаточно малом ε выполняется неравенство $\alpha_j + æ_j - \Delta^*_p(a_j) - \varepsilon > -\nu$ и, следовательно, функция $h(t) := g^-(t)F^+(t)$ является суммируемой на γ. Тогда в силу условия (6) интеграл $\widetilde{h}$ имеет предельные значения на $\gamma \setminus T$ из областей D^+, D^- и справедливы формулы Сохоцкого. Поэтому функция Φ_0 удовлетворяет условию граничного сопряжения (2).

Оценим теперь $\Phi_0\,(z)$ в окрестности точки a_j. С этой целью заметим, что при $\varepsilon > 0$ в достаточно малой окрестности этой точки справедлива оценка

$$|\exp\,(\widetilde{p}\,(z))|\,\prod_{j=1}^{m}|z-a_j|^{-æ_j}\ \le\ c\,|z-a_j|^{\Delta_p(a_j)-æ_j-\varepsilon}\,, \tag{11}$$

где постоянная с не зависит от z. Справедлива также оценка

$$\left|\,\int\limits_{\gamma}\frac{g^-(t)F^+(t)}{t-z}\,dt\right|\le\ c\prod_{j=1}^{m}\max\{|z-a_j|^{\mu_j+\beta_j},V_{\alpha_j+\mu_j+\nu}(|z-a_j|)\}\ \ \forall\,z\in\mathbb{C}\setminus\gamma\,, \tag{12}$$

где

$$V_{\alpha_j+\mu_j+\nu}\,(r)\ =\ \begin{cases} r^{\alpha_j+\mu_j+\nu-1}\,, & \text{если}\quad \alpha_j+\mu_j+\nu\ <\ 1;\\ \ln\frac{d}{r}\,, & \text{если}\quad \alpha_j+\mu_j+\nu\ =\ 1;\\ 1\,, & \text{если}\quad \alpha_j+\mu_j+\nu\ >\ 1,\end{cases}$$

$\mu_j := æ_j - \Delta_p^*\,(a_j) - \varepsilon$ и постоянная c не зависит от z. В результате с учетом оценок (11), (12), а также неравенств

$$\alpha_j+\Delta_p\,(a_j)-\Delta_p^*\,(a_j)+\nu-1-2\varepsilon>-1\,,\quad \beta_j+\Delta_p\,(a_j)-\Delta_p^*\,(a_j)-2\varepsilon>-1\,,$$

выполняющихся при достаточно малом ε, приходим к заключению о том, что функция Φ_0 удовлетворяет неравенству вида (1).

Итак, Φ_0 является частным решением неоднородной краевой задачи Римана. При этом отметим, что в случае $æ < 0$ функция $\exp\,(\widetilde{p}\,(z))\prod\limits_{j=1}^{m}\,(z-a_j)^{-æ_j}$ имеет полюс порядка $-æ$ в бесконечно удаленной точке и Φ_0 является решением краевой задачи Римана лишь при выполнении $-æ-1$ условий (9).

Для завершения доказательства остается заметить, что в формуле (10) общее решение неоднородной краевой задачи Римана представлено в виде суммы частного решения этой задачи и общего решения однородной задачи.

В следующей теореме, которая доказывается аналогично теореме 2, снимается условие (8) этой теоремы за счет дополнительных предположений о функции G.

Теорема 3. *Пусть γ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая, удовлетворяющая условию (5), где $0<\nu\le 1$; функция G, представимая в виде $G(t)=\exp\,(p(t))$, где $p\in H_T$, удовлетворяет условию вида (6) и оценкам*

$$|G(t)|\ge c\prod_{j=1}^{m}|t-a_j|^{n_j}\quad\forall\,t\in\gamma\setminus T,\quad n_j\ge 0;$$

$$\int\limits_{[0,r_t]}\frac{\Omega_t(G,\gamma,\eta)}{\eta}\,d\theta_t(\eta)\le c\prod_{j=1}^{m}|t-a_j|^{m_j}\quad\forall\,t\in\gamma\setminus T,\quad m_j\in\mathbb{R}\,,$$

в которых постоянная с не зависит от t, и, кроме того, при всех $j=\overline{1,m}$ конечны числа $\Delta_p(a_j)$, $\Delta_p^*(a_j)$; функция g представима в виде $g=g^++g^-$, где $g^+\in\mathcal{H}_T^+$, а функция g^- голоморфна в D^-, непрерывна на $\overline{D^-}\setminus T$ и удовлетворяет неравенству

$$|g^-(z)|\le c\prod_{j=1}^{m}|z-a_j|^{k_j}\quad\forall\,z\in D^-\,,$$

$$k_j>\Delta_p^*(a_j)-\Delta_p(a_j)+n_j+\max\{n_j-m_j-1;-\nu\}\,,$$

где постоянная с не зависит от z.

Тогда при $æ\ge -1$ неоднородная краевая задача Римана разрешима, а при $æ<-1$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение $-æ-1$ условий (9). Общее решение неоднородной краевой задачи Римана дается формулой (10).

Список литературы

[1] Гахов Ф.Д. Краевые задачи.– М.: Наука, 1977.– 640 с.

[2] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968.– 511 с.

[3] Сейфуллаев Р.К. Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой // Мат. сб. – 1980. – **112**, N 2. – С. 147 – 161.

[4] Кац Б.А. Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом // Изв. вузов. Математика. – 1981. – N 12. – С. 41 – 50.

[5] Данилов Е.А. Зависимость числа решений однородной задачи Римана от контура и модуля коэффициента // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, N 6.– С. 1305 – 1308.

[6] B. Gonzalez, J. Bory. The homogeneous Riemann boundary value problem on rectifiable open Jordan curves // Science. Mat. Havana.– 1988.– **9**, N 2.– P. 3 – 9.

[7] Плакса С.А. Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн.– 1989.– **41**, N 1.– С. 116– 121.

[8] K. Kutlu. On Riemann boundary value problem // An. Univ. Timişoara: Ser. Matematiča-Informatiča – 2000.– **38**, N 1.– P. 89 – 96.

[9] D. Pena, J. Bory. Riemann boundary value problem on a regular open curve // J. Nat. Geom. – 2002.– **22**, N 1.– P. 1 – 17.

[10] Салаев В.В. Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. – 1976. – **19**, N 3. – С. 365 – 380.

Васильева Ю.В., Плакса С.А. Институт математики НАН Украины, отдел комплексного анализа и теории потенциала, г. Киев, Украина.

E-mail: vasilieva@golova.com.ua, plaksa@imath.kiev.ua

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ НА ВЕЩЕСТВЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Загорский А.С.
Воронежский государственный университет,
Воронеж, Россия

В данной статье рассматриваются спектральные свойства линейных отношений (многозначных линейных операторов) на вещественных банаховых пространствах и их комплексификациях.

1. Некоторые сведения из теории линейных отношений.

Приводимые в этом параграфе понятия и результаты из теории линейных отношений содержаться в работах [7]-[10].

В этой статье символами X, Y обозначаются линейные пространства, рассматриваемые над полем $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, т.е. либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Через $\widetilde{\mathbb{K}}$ обозначим расширение поля $\mathbb{K}$ с помощью точки $\{\infty\}$.

Определение 1. Любое линейное подпространство $A \subseteq X \times Y$ называется **линейным отношением** между линейными пространствами X и Y (линейным отношением на пространстве X, если $Y = X$). Если $X,\ Y-$ банаховы пространства и подпространство A замкнуто в $X \times Y$, то A называется **замкнутым** линейным отношением.

Подпространство $D(A) = \{x \in X \ : \ \text{существует } y \in Y \text{ такой, что } (x, y) \in A\}$, являющееся (канонической) проекцией A на X, называется **областью определения** линейного отношения $A \subseteq X \times Y$. Через Ax, где $x \in D(A)$, обозначим множество $\{y \in Y \ : \ (x, y) \in A\}$; кроме того, $Ker\ A = \{x \in D(A) \ : \ (x, 0) \in A\}$ - **ядро** отношения A и $Im\ A = \{y \in Y \ : \ (x, y) \in A \text{ для некоторого } x \in D(A)\} = \bigcup\limits_{x \in D(A)} Ax$ - **область его значений**, являющееся проекцией A на Y. Отметим, что $Ax = y + A0$ для любого $y \in Ax$. Для любого подмножества $M \subseteq X$ полагается $A(M) = \bigcup\limits_{x \in M} Ax$.

Суммой двух линейных отношений $A, B \subseteq X \times Y$ называется линейное подпространство из $X \times Y$ вида $A + B = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ x \in D(A) \cap D(B),\ y \in Ax + Bx\}$. Значит, $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$, и под $Ax + Bx$ понимается алгебраическая сумма двух множеств Ax, Bx.

Произведением линейных отношений $A \subseteq X \times Y,\ B \subseteq Y \times Z$, где $Z-$ линейное пространство, называется линейное подпространство из $X \times Z$ вида $BA = \{(x, z) \in X \times Z \ : \ \text{существует } y \in D(B) \subseteq Y \text{ такой, что } (x, y) \in A,\ (y, z) \in B\}$.

Обратным к линейному отношению $A \subseteq X \times Y$ называется линейное отношение $A^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \ : \ (x, y) \in A\} \subseteq Y \times X$.

Каждое линейное отношение $A \subseteq X \times Y$ является графиком многозначного отображения $\widetilde{A} : D(A) \subseteq X \to 2^Y$, где $\widetilde{A}x = Ax \in 2^Y$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ A. Множество линейных отношений между X и Y обозначим через $LR(X, Y)$; если же $X = Y$, то положим $LR(X) = LR(X, X)$. При этом множество линейных операторов $LO(X, Y)$, действующих из X в Y считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X, Y)$. Если $X = Y$, то положим $LO(X) = LO(X, X)$.

До конца этого параграфа $X, Y-$ банаховы пространства.

Множество замкнутых линейных отношений на X обозначим через $LRC(X)$. Таким образом, если $End\ X-$ банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X, то $End\ X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Отношение $A \in LR(X, Y)$ называется **инъективным**, если $Ker\ A = \{0\}$, и **сюрьективным**, если $Im\ A = Y$.

Замкнутое отношение $A \in LR(X)$ называется **непрерывно обратимым**, если оно одновременно инъективно и сюрьективно, и тогда $A^{-1} \in End\ X$.

Определение 2. Пусть $X-$ банахово пространство, рассматриваемое над полем $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. **Резольвентным множеством** отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\rho(A)$ всех $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $(A - \lambda I)^{-1} \in End\ X$. **Спектром** отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\sigma(A) = \mathbb{K} \backslash \rho(A)$.

Множество $\rho(A)$ открыто, спектр $\sigma(A)$ отношения $A \in LR(X)$ замкнут.

Определение 3. Отображение $R(\ \cdot\ , A)\ :\ \rho(A) \subseteq \mathbb{K} \to End\ X,\ R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1},\ \lambda \in \rho(A)$ называется **резольвентой** отношения $A \in LR(X)$.

Резольвента отношения $A \in LR(X)$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см. следующее определение), при этом $Ker\ R(\lambda_0, A) = A0,\ Im(\lambda_0, A) = D(A)\ \forall \lambda_0 \in \rho(A)$.

Определение 4. Отображение $R\ :\ \Omega \subseteq \mathbb{K} \to End\ X$, удовлетворяющее равенству (тождеству Гильберта) $R(\lambda_1) - R(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R(\lambda_1)R(\lambda_2),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$ называется **псевдорезольвентой**.

Теорема 1. *Любая псевдорезольвента $R\ :\ \Omega \to End\ X$ является резольвентой некоторого линейного отношения $A \in LR(X)$, $\Omega \subseteq \rho(A)$ и отношение A определяется равенством $A = R(\lambda_0)^{-1} + \lambda_0 I,\ \lambda_0 \in \Omega$, причем правая часть не зависит от выбора λ_0.*

Определение 5. Расширенным спектром отношения $A \in LR(X)$ называется подмножество $\widetilde{\sigma}(A)$ из $\widetilde{\mathbb{K}}$, которое совпадает с обычным спектром $\sigma(A)$, если $A \in End\ X$ и равное $\sigma(A) \cup \{\infty\}$, если $A \notin End\ X$. **Расширенным резольвентным множеством** отношения $A \in LR(X)$ называется множество $\widetilde{\rho}(A) = \widetilde{\mathbb{K}} \backslash \widetilde{\sigma}(A)$.

Определение 6. Линейное замкнутое подпространство $X_0 \subseteq X$ назовем **инвариантным** для отношения $A \in LR(X)$ с непустым резольвентным множеством $\rho(A)$, если X_0 инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, A),\ \lambda \in \rho(A)$. **Сужением** отношения $A \in LR(X)$ на инвариантное подпространство X_0 назовем отношение $A_0 \in LR(X_0)$, резольвентой которого является сужение $R_0 : \rho(A) \to End\ X_0,\ R_0(\lambda) = R(\lambda, A) \mid X_0,\ \lambda \in \rho(A)$ резольвенты $R(\cdot, A) : \rho(A) \to End\ X$ на X_0 и обозначим его через $A_0 = A \mid X_0$.

Корректность определения сужения следует из теоремы 1.

Определение 7. Пусть X_0, X_1- инвариантные подпространства из X для отношения $A \in LR(X)$, $A_i = A|X_i,\ i = 0, 1-$ сужения A на подпространства X_0, X_1 соответственно и выполнены следующие условия: $X = X_0 \oplus X_1,\ A = A_0 \oplus A_1$, где второе условие означает, что подпространство $A \subseteq X \times X$ есть прямая сумма подпространств $A_0 \subseteq X_0 \times X_0 \subseteq X \times X$ и $A_1 \subseteq X_1 \times X_1 \subseteq X \times X$. Тогда будем говорить, что A допускает **разложение** относительно прямой суммы $X = X_0 \oplus X_1$, а также, что A является **прямой суммой** отношений A_1 и A_2.

Отметим, что если справедливы равенства $X = X_0 \oplus X_1$ и $A = A_0 \oplus A_1$, то верны разложения $D(A) = D(A_0) \oplus D(A_1),\ Ker\ A = Ker\ A_0 \oplus Ker\ A_1$, и $Im\ A = Im\ A_0 \oplus Im\ A_1,\ A0 = A_0 0 \oplus A_1 0$. Множество Ax для любого вектора $x \in D(A)$ определяется формулой $Ax = A_0 x_0 + A_1 x_1,\ x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in D(A_0),\ x_1 \in D(A_1)$.

Определение 8. Будем говорить, что отношение $A \in LR(X)$ **перестановочно** с отображением $F : X \to X$ (не обязательно линейным оператором), если $(F(x), F(y)) \in A$ для всех $(x, y) \in A$.

Определение 9. Сопряженным к отношению $A \in LR(X, Y)$ называется линейное отношение A^* из $Y^* \times X^*$ ($X^*,\ Y^*-$ сопряженные к X и Y банаховы пространства) вида

$$A^* = \{(\eta, \xi) \in Y^* \times X^* : \xi(x) = \eta(y)\ \forall (x, y) \in A\}.$$

Сопряженное отношение A^* всегда замкнуто.

2. Комплексификация линейных отношений.

В дальнейшем символами X и Y обозначаются вещественные линейные пространства. Нами используется традиционное

Определение 10. Линейное пространство $X^2 = X \times X$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел с законом внешней композиции $(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (x, y) \in X^2$ называется **комплексификацией** вещественного линейного пространства X и обозначается через $\mathbb{X}$ или через $Compl(X)$ ($\mathbb{Y}-$ комплексификация линейного пространства Y).

Далее символом $\mathbb{I}$ будем обозначать тождественный оператор в комплексификации $\mathbb{X}$ пространства X. Элементы из $\mathbb{X}$ удобно записывать в виде $x+iy$, где $x,y\in X$, $i-$ мнимая единица. При этом X будем рассматривать в качестве подпространства $\mathbb{X}$. Норму в $\mathbb{X}$, если $X-$ банахово пространство, определим равенством $\|(x,y)\| = \max\limits_{\psi\in[0,2\pi]}\|(\cos\psi)x+(\sin\psi)y\|,\ x,y\in X$. Символом $\mathbb{J}$ обозначим отображения $\mathbb{J}:\mathbb{X}\to\mathbb{X},\ \mathbb{J}(x+iy)=x-iy,\ x,y\in X$, которое будет аддитивным, но не однородным. Ясно, что $\mathbb{J}^2=\mathbb{I}$ и $\mathbb{J}^{-1}=\mathbb{J}$.

Определение 11. **Комплексификацией** линейного отношения $A\in LR(X,Y)$ называется линейное отношение $\mathbb{A}=\{(x_1+ix_2,y_1+iy_2)\in\mathbb{X}^2:(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A\}\in LR(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Замечание. Канонические вложения $X\subset\mathbb{X}$ и $Y\subset\mathbb{Y}$ индуцируют вложения $X^2\subset\mathbb{X}^2$ и $Y^2\subset\mathbb{Y}^2$ и, значит вложение $A\subset\mathbb{A}$. Таким образом имеет место равенство $A=\mathbb{A}\cap(X\times Y)$. Значит, комплексификация $\mathbb{A}$ является комплексификацией только одного отношения из $LR(X,Y)$. Если $A\in LO(X,Y)$, то и $\mathbb{A}\in LO(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

В оставшейся части этого параграфа $X-$ вещественное банахово пространство и $\mathbb{X}-$ его комплексификация.

Определение 12. Пусть $A\in LRC(X)$. Множество $\sigma(\mathbb{A})$ назовем **комплексным спектром** отношения A, а множество $\widetilde{\sigma}(\mathbb{A})-$ его **расширенным комплексным спектром**. Они обозначаются соответственно через $\sigma(A,\mathbb{C})$ и $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$. Множества $\rho(A,\mathbb{C})=\mathbb{C}\setminus\sigma(A,\mathbb{C}),\ \widetilde{\rho}(A,\mathbb{C})=\widetilde{\mathbb{C}}\setminus\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$ называются **комплексным резольвентным** и **расширенным комплексным резольвентным** множествами отношения A.

Лемма 1. *Для любого отношения $A\in LR(X)$ верны равенства:*
1. $D(\mathbb{A})=D(A)\times D(A)$, *2. $Ker\ \mathbb{A}=Ker\ A\times Ker\ A$,*
3. $Im\ \mathbb{A}=Im\ A\times Im\ A$, *4. $\mathbb{A}0=A0\times A0$,*
5. $\widetilde{\sigma}(A)=\widetilde{\sigma}(\mathbb{A})\cap\widetilde{\mathbb{R}}$, *6. $\sigma(A)=\sigma(\mathbb{A})\cap\mathbb{R}$,*
причем $\mathbb{A}\in LRC(\mathbb{X})$, если $A\in LRC(X)$.

Лемма 2. *Отношение $\mathbb{A}\in LR(\mathbb{X})$ является комплексификацией некоторого отношения $A\in LR(X)$ тогда и только тогда, когда оно перестановочно с отображением $\mathbb{J}$, или, что эквивалентно, выполняется равенство $\mathbb{A}=\mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{J}$.*

Следствие 1. *Если для $\mathbb{A}\in LR(\mathbb{X})$ выполнено соотношение$\mathbb{A}=\mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{J}$, то $\mathbb{A}$ является комплексификацией отношения $A=\mathbb{A}\cap(X\times X)$.*

3. О функциональном исчислении для линейных отношений на вещественных банаховых пространствах.

До конца этой статьи символом X обозначается вещественное банахово пространство, $\mathbb{X}-$ его комплексификация, $A\in LR(X)$ и $\mathbb{A}\in LR(\mathbb{X})-$ его комплексификация.

Для любого множества $\Delta\subseteq\mathbb{C}$ через $\overline{\Delta}$ обозначим множество $\{\overline{\lambda}:\lambda\in\Delta\}$. Если $\Delta=\overline{\Delta}$, то множество Δ будем называть **симметричным** относительно $\mathbb{R}$.

Лемма 3. *Спектр $\sigma(\mathbb{A})$ комплексификации $\mathbb{A}$ отношения A симметричен, причем верно равенство $R(\overline{\lambda},\mathbb{A})=\mathbb{J}R(\lambda,\mathbb{A})\mathbb{J},\ \lambda\in\rho(A,\mathbb{C})$.*

Пусть $\Delta-$ открытое множество из $\mathbb{C}$, содержащее $\sigma(A,\mathbb{C})$ и обладающее свойством $\Delta=\overline{\Delta}$. Рассмотрим алгебру $C(\Delta)$ непрерывных на Δ комплекснозначных функций. Пусть $\gamma-$ контур, лежащий в $\Delta\cap\rho(A,\mathbb{C})$ и являющийся образом непрерывно дифференцируемой функции $\varphi:L\to\mathbb{C}$ (допускается конечное число разрывов первого рода у φ'), где $L-$ некоторый промежуток из $\mathbb{R}$, совпадающий либо с отрезком вида $[-\Theta,\Theta],\ \Theta>0$, либо $L=\mathbb{R}$. Дополнительно предположим, что $\varphi(t)=\overline{\varphi(-t)},\ t\in L$.

Рассмотрим функцию $f\in C(\Delta)$ и контурный интеграл $\mathbb{B}_f=\dfrac{i}{2\pi}\int\limits_{\gamma}f(\lambda)R(\lambda,\mathbb{A})d\lambda=\dfrac{i}{2\pi}\int\limits_{L}f(\varphi(t))R(\varphi(t),\mathbb{A})\varphi'(t)dt$ при условии его абсолютной сходимости. Тем самым этой формулой определен ограниченный оператор $\mathbb{B}_f\in End\ \mathbb{X}$. Из леммы 3 следует, что верны равенства

$\mathbb{J}\mathbb{B}_f\mathbb{J} = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_L f(\varphi(-t))R(\varphi(-t),\mathbb{A})\varphi'(-t)dt = \mathbb{B}_{\widetilde{f}}$, где $\widetilde{f} \in C(\Delta)$, $\widetilde{f}(\lambda) = \overline{f(\overline{\lambda})}$, $\lambda \in \Delta$. Отсюда получаем, что верна

Лемма 4. *Имеет место равенство* $\mathbb{J}\mathbb{B}_f\mathbb{J} = \mathbb{B}_{\widetilde{f}}$. *Если* $\widetilde{f} = f$, *то оператор* $\mathbb{B}_f$ *является комплексификацией некоторого оператора* $B_f \in End\ X$.

Для вычисления оператора B_f введем понятие комплексной резольвенты линейного отношения $A \in LR(X)$.

Определение 13. Отображение $R_{\mathbb{C}}(\cdot,\cdot,A) : \mathbb{C} \times \rho(A,\mathbb{C}) \to End\ X$, где $R_{\mathbb{C}}(\mu,\lambda,A)-$ оператор из $End\ X$, комплексификацией которого является оператор из $End\ \mathbb{X}$ вида $\frac{1}{2}(\mu R(\lambda,\mathbb{A}) + \overline{\mu}R(\overline{\lambda},\mathbb{A}))$, $\lambda \in \rho(A,\mathbb{C}), \mu \in \mathbb{C}$, будем называть **комплексной резольвентой** отношения $A \in LR(X)$.

Корректность определения 13 следует из лемм 2 и 3. Отметим, что сужение комплексной резольвенты на множество $\{1\} \times \mathbb{R}$ отождествляемое с $\mathbb{R}$ совпадает с резольвентой $R(\cdot,A) : \rho(A) \subset \mathbb{R} \to End\ X$ отношения $A \in LR(X)$, а сама комплексная резольвента является функцией первого аргумента при декомплексификации $\mathbb{C}$.

Через Φ обозначим функцию $\Phi : \rho(A,\mathbb{C}) \to End\ X$, $\Phi(\lambda) = ((A-\lambda_1 I)^2 + \lambda_2^2 I)^{-1}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \rho(A,\mathbb{C})$. Корректность ее определения следует из равенства леммы 2.

Лемма 5. *Если* $A-$ *линейный оператор из* $LO(X)$, *то его комплексная резольвента представима в виде* $R_{\mathbb{C}}(\mu,\lambda,A) = ((Re\ \mu)A - (Re\ \mu\overline{\lambda})I)\Phi(\lambda) = ((Re\ \mu)A - (Re\ \mu\overline{\lambda})I)((A-(Re\ \lambda)I)^2 + (Im\ \lambda)^2 I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A,\mathbb{C})$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. *В условиях леммы 4 оператор* B_f *определяется формулой* $B_f = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\Theta R_{\mathbb{C}}(if(\varphi(t))\varphi'(t),\varphi(t),A)dt$. *В частности, если* $A \in LO(X)$, *то оператор* B_f *определяется формулой*

$$B_f = \frac{1}{\pi}\int_0^\Theta (-(Im\ f(\varphi(t))\varphi'(t))A + (Im\ f(\varphi(t))\overline{\varphi(t)}\varphi'(t))I)\Phi(\varphi(t))dt. \tag{3.1}$$

Теперь приступим к построению функционального исчисления для линейного отношения $A \in LR(X)$ с отмеченными ранее ограничениями на контур γ и функцию $\varphi : L \to \mathbb{C}$. Открытое множество $\Delta \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ будем считать содержащим $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$, а множество $\Delta \cap \mathbb{C}$ симметричным. Символом $\mathfrak{F}(\Delta)$ обозначим алгебру голоморфных на Δ комплексных функций $f : \Delta \to \mathbb{C}$, обладающих свойством $f(\overline{\lambda}) = \overline{f(\lambda)}$, $\lambda \in \Delta$. Предположим, что контур γ является замкнутым (то есть $\varphi(-\Theta) = \varphi(\Theta)$) и окружающим $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$.

Рассмотрим функцию $f \in \mathfrak{F}(\Delta)$ такую, что интеграл $\displaystyle\int_\gamma f(\lambda)R(\lambda,\mathbb{A})d\lambda$ абсолютно сходится, причем $f(\infty) \in \mathbb{R}$, если $\infty \in \Delta$. Тогда формула $f(\mathbb{A}) = \delta f(\infty)\mathbb{I} - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(\lambda)R(\lambda,\mathbb{A})d\lambda$, где $\delta = 1$ или $\delta = 0$ в зависимости от того находится $\lambda = \infty$ внутри γ или вне его, определяет ограниченный оператор из алгебры $End\ \mathbb{X}$ который назовем функцией f от отношения $\mathbb{A}$. Нами используется термин контур "окружает" $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$ в том смысле, что он положительно ориентирован и $\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})$ содержится внутри γ. В статье [9, теорема 2.5] получено следующее утверждение

Теорема 3. *Для спектра оператора* $f(\mathbb{A})$ *имеет место равенство* $\sigma(f(\mathbb{A})) = f(\widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})) = \{f(\lambda),\ \lambda \in \widetilde{\sigma}(A,\mathbb{C})\}$.

Из лемм 2, 4 и теоремы 2 следует, что оператор $f(\mathbb{A}) \in End\ \mathbb{X}$ является комплексификацией оператора из $End\ X$, который обозначим через $f(A)$ и назовем функцией f от отношения A. Таким образом верна

Теорема 4. *Оператор $f(A) \in End\ X$ определяется формулой*

$$f(A) = \delta f(\infty)I - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\Theta R_{\mathbb{C}}(if(\varphi(t))\varphi'(t), \varphi(t), A)dt, \tag{3.2}$$

где правая часть не зависит от выбора функции φ с отмеченными выше свойствами. Если $A \in LO(X)$, то формула (3.2) приобретает вид $f(A) = \delta f(\infty)I - B_f$, где оператор $B_f \in End\ X$ задается формулой (3.1). Кроме того имеют место следующее равенства $\sigma(f(A), \mathbb{C}) = f(\widetilde{\sigma}(A, \mathbb{C}))$, $\sigma(f(A)) = f(\widetilde{\sigma}(A, \mathbb{C})) \cap \mathbb{R}$.

4. О полугруппах операторов и спектральной теореме.

Определение 14. Отношение $A \in LR(X)$ назовем **секториальным** с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$, если для некоторого $a \in \mathbb{R}$ сектор $\Omega = \Omega_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg(\lambda - a)| < \theta,\ \lambda \neq a\}$ содержится в $\rho(A, \mathbb{C})$ и для каждого $\delta \in (0, \theta - \pi/2)$ выполнено условие $\sup\limits_{\lambda \in \Omega_{a,\theta-\delta}} \| R(a - \lambda, \lambda, A) \| = M_\delta < \infty$.

Если необходимо рассматривая вместо отношения A отношение $A - aI$, без ограничения общности можно считать $a = 0$ и соответствующий сектор обозначать Ω_θ.

Итак, пусть $A \in LR(X)-$ секториальное отношение. Построение голоморфной полугруппы $\mathbb{T} : [0, \infty) \to End\ \mathbb{X}$ осуществляется стандартным образом с помощью формулы

$$\mathbb{T}(t) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, \mathbb{A})d\lambda,\ \mathbb{T}(0) = \mathbb{I}, \tag{4.1}$$

где $\gamma-$ граница сектора $\Omega_{\theta+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Функцию $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяющую контур γ зададим равенствами $\varphi_\varepsilon(\tau) = -e^{-i(\theta-\varepsilon)}\tau$ для $\tau \in (-\infty, 0)$ и $\varphi_\varepsilon(\tau) = e^{i(\theta-\varepsilon)}\tau$ для $\tau \in [0, \infty)$, где $\varepsilon = (\theta - \pi/2 - \delta)/2$.

Сходимость интеграла (4.1) (при задании контура указанной функцией φ) "в главном" $\mathbb{T}(t) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \frac{i}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\alpha} e^{\lambda t} R(\lambda, \mathbb{A})d\lambda$, где $\gamma_\alpha,\ \alpha > 0, -$ контур, являющийся образом сужения $\varphi_\alpha : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{C}$ функции φ на $[-\alpha, \alpha]$.

Обычным образом проверяется (см., например, [9]), что получаемая таким образом полугруппа $\mathbb{T} : [0, \infty) \to End\ \mathbb{X}$ допускает голоморфное расширение в некоторый сектор из $\mathbb{C}$. Поскольку функции $\varphi,\ \varphi_\alpha,\ f_t(\lambda) = e^{\lambda t},\ f_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то каждый из операторов $\mathbb{T}(t), t > 0$ является комплексификацией некоторого оператора $T(t),\ t > 0$. Если $A \in LO(X)$, то из формулы (3.1) получаем представление операторов $T(t)$ вида

$$T(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{t\tau\cos\omega}(\tau\sin(\sin\omega)I - \sin(\omega + \sin\omega)A)\Phi(\tau e^{i\omega})d\tau, \tag{4.2}$$

где $\omega-$ любое число из $(\pi/2, \theta)$.

Теорема 5. *Пусть $A \in LR(X)-$ секториальное отношение с углом $\theta \in (\pi/2, \pi)$. Предположим, что векторы из подпространства $A0$ разделяют функционалы из подпространства $A^*0 \subseteq X^*$. Тогда*

1. банахово пространство X представимо в виде прямой суммы $X = X_0 \oplus X_\infty$, где $X_\infty = A0$, а X_0- замыкание подпространства $D(A)$ в X; кроме того подпространства X_0 и X_∞ замкнуты и инвариантны относительно A (по любому из двух определений);

2. сужение $A_0 = A|X_0$ является секториальным оператором из $LO(X_0)$ причем A_0- генератор голоморфной полугруппы операторов $T_0 : [0, \infty) \to End\ X_0$;

3. определенная формулой (4.2) полугруппа допускает разложение $T(t) = T_0(t) \oplus T_\infty(t)$ $T_\infty(t) = 0,\ t \geqslant 0$, относительно разложения $X = X_0 \oplus X_\infty$, пространства X.

Следствие 2. *Для комплексного спектра операторов $T(t),\ t > 0$ имеет место равенство $\sigma(T(t), \mathbb{C}) \setminus \{0\} = \{e^{\lambda t},\ \lambda \in \sigma(A, \mathbb{C})\}$.*

В основе приводимых далее результатов находится полученная в статье [9]

Теорема 6. *Пусть $Z-$ комплексное банахово пространство и расширенный спектр отношения $A \in LR(Z)$ представим в виде $\widetilde{\sigma}(A) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0- компакт из $\mathbb{C}$ и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$ (σ_0 называют спектральной компонентой из $\widetilde{\sigma}(A)$).*

Тогда существует разложение пространства Z в прямую сумму $Z = Z_0 \oplus Z_1$ инвариантных (в смысле определения 6) относительно A замкнутых подпространств Z_0 и Z_1, а сужения $A_0 = A|Z_0$ и $A_1 = A|Z_1$ обладают следующими свойствами:

1. $A_0 \in End\ Z_0$, $\widetilde{\sigma}(A_0) = \sigma(A_0) = \sigma_0$;

2. $A_1 0 = A0$, $D(A) = Z_0 \oplus D(A_1)$, $\widetilde{\sigma}(A_1) = \sigma_1$.

Разложение $Z = Z_0 \oplus Z_1$ осуществляет проектор Рисса P (то есть $Z_0 = Im\ P$, $Z_1 = Im(I-P)$), определенный формулой $P = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma R(\lambda, A)d\lambda$, где $\gamma-$ замкнутая жорданова положительно ориентированная кривая, расположенная в $\rho(A)$ так, что внутри нее лежит σ_0 (то есть положительно ориентированная), а σ_1- вне. В дальнейшем про такой проектор будем говорить, что оно построен по σ_0.

Важным является вопрос получения аналога теоремы 6 для линейного отношения A на вещественном банаховом пространстве X по некоторой спектральной компоненте σ_0 из ее расширенного комплексного спектра. Основная проблема состоит в том, что не всякий проектор Рисса, построенный по спектральной компоненте из $\widetilde{\sigma}(\mathbb{A})$ комплексификации $\mathbb{A}$ отношения A, является комплексификацией некоторого проектора из $End\ X$.

Теорема 7. *Пусть расширенный комплексный спектр $\widetilde{\sigma}(A, \mathbb{C})$ допускает представление вида $\widetilde{\sigma}(A, \mathbb{C}) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где σ_0- компакт из $\mathbb{C}$, σ_1- замкнутое множество из $\widetilde{\mathbb{C}}$ и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$. Тогда проектор Рисса $\mathbb{P} \in End\ \mathbb{X}$, построенный по спектральной компоненте σ_0, является комплексификацией некоторого проектора из $P \in End\ X$ тогда и только тогда, когда $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$ (то есть множество σ_0 симметрично в $\mathbb{C}$ относительно $\mathbb{R}$).*

Если $\overline{\sigma_0} = \sigma_0$, то справедливо разложение $X = X_0 \oplus X_1$, где $X_0 = Im\ P$, $X_1 = Ker\ P$. Для частей $A_k = A|X_k, k = 0, 1$ отношения A верны следующие свойства:

1. $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \oplus \mathbb{X}_1$, то есть комплексификация $\mathbb{X}$ банахова пространства X есть прямая сумма комплексификаций $\mathbb{X}_0$ и $\mathbb{X}_1$ подпространств X_0 и X_1 соответственно, причем $\mathbb{X}_0$ и $\mathbb{X}_1-$ инвариантные относительно $\mathbb{A}$ пространства;

2. $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_1$, где $\mathbb{A}_0 \in End\ \mathbb{X}_0-$ комплексификация оператора A_0 и $\mathbb{A}_1 \in LR(\mathbb{X}_1)-$ комплексификаций отношения $A_1 \in LR(X_1)$. Кроме того, $A = A_0 \oplus A_1$;

3. $A_0 \in End\ X_0$, $\widetilde{\sigma}(A_0, \mathbb{C}) = \sigma(A_0, \mathbb{C}) = \sigma_0$;

4. $A_1 0 = A0$, $D(A) = X_0 \oplus D(A_1)$, $\widetilde{\sigma}(A_1, \mathbb{C}) = \widetilde{\sigma}(\mathbb{A}_1) = \sigma_1$;

5. подпространства X_0 и X_1 являются симметричными подпространствами из X.

Теорема 8. *Пусть σ_0- симметричная спектральная компонента из $\sigma(A, \mathbb{C})$. Тогда проектор Рисса $P \in End\ X$, построенный по σ_0, определяется формулой $P = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 R_{\mathbb{C}}(i\varphi'(t), \varphi(t), A)dt$, где $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}-$ любая непрерывно дифференцируемая функция с контуром $\gamma = \varphi([0,1])$, окружающим σ_0.*

Список литературы

[1] Данфорд Н., Шварц Дж.Т., Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, Т.I. 1962.

[2] Бурбаки Н. Спектральная теория. - М.: Мир, 1972.

[3] Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы операторов. М.: ИЛ, 1962

[4] Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter semigroups for linear evolution equations. New-York: Springer-Verlag, 2000.

[5] Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975.

[6] Функциональный анализ.Справочная математическая библиотека / под ред. С.Г.Крейна. - М.: Наука, 1972.

[7] Cross R. Multivalued linear operators. New York: M. Dekker, 1998.

[8] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics// A Series of Monographs and Textbooks. - New York: M. Dekker, 1998

[9] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сб., 2002. Т. 193, № 11.

[10] Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. Современная математика. Фундаментальные направления. - М.: МАИ, 2004.

[11] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. - М.: Мир, 1985.

О ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ МЕДЛЕННО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Журавлев Н.Б.
Российский Университет Дружбы Народов,
Москва, Россия

В данной статье исследуются условия гиперболичности периодичесих решений функционально-дифференциальных уравнений, содержащих несколько запаздываний. Это условия на спектор оператора монодромии, действие которого определяется ршением начальной задачи для функционально-дифференциального уравнения. Указывается метод построения аналитической функции, нули которой совпадают с собственными значениями оператора монодромии. Для построения такой фукции составляется вспомогательная краевая задача для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащая спектральный параметр в краевых условиях.

1. Введение

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравенее

$$x'(t) = f(x(t), x(t-1), \ldots, x(t-n)), \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируема. Мы будем изучать периодическое решение $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ этого уравнения с рациональным периодом $p > n$, предполагая, что такое решение существует. Уравнение (1) является обобщением уравнения:

$$x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

на случай нескольких запаздываний. Интерес к уравнениям такого типа вызван их применениями в теории управления с последействием и теории искуственных нейронных сетей. Впервые периодические решения таких уравнений были рассмотрены в работе Дж. Л. Каплана и Дж. А. Йорка [6]. Периодическое решение называется гиперболическим если оператор монодромии имеет на единичной окружности единственное простое собственное значение равное 1. В книге Дж. Хейла [5] для дифференциальных уравнений с запаздыванием было доказано, что поведение траекторий, близких к периодической орбите определяется спектром оператора монодромии ассоциированного с этим периодическим решением. В частности любая траектория, близкая к периодической орбите гиперболического решения на полуинтервале $[0, \infty)$ или $(-\infty, 0]$, сходится экспоненциально к этой периодической орбите при $t \to \infty$ или при $t \to -\infty$ соответственно.

Однако в отличии от обыкновенных дифференциальных уравнений критерий гипероличности для функционально-дифференциальных уравнений представляет значительно более сложную задачу. Раньше такой критерий был получен только в частных случаях: когда период решения равен 4 — в работе S. N. Chow, H.-O. Walther [2], и когда период равен 3 — в работе O. Arino, A. Chërif [1]. Для произвольного рационального периода критерий гиперболичности был получен Х.-О. Вальтером и А. Л. Скубачевским [7, 8, 9]. Затем теми же авторами был рассмотрен случай иррационального периода [10]. В настоящей статье будет получено обобщение критерия гиперболичности, построенного в работе [7], на случай , когда правая часть уравнения зависит от нескольких запаздываний. Кроме того, достигнуто усиление ранее известных результатов [7] (см. теорему 2).

Введем некоторые обозначения. Пусть $C_{\mathbb{C}} = C([-n, 0], \mathbb{C})$,

$$\alpha_i(t) = \partial_i f\left(x(t), x(t-1), \ldots, x(t-n)\right), \quad \text{где } \partial_i f\left(y_0, y_1, \ldots, y_n\right) = f'_{y_i}\left(y_0, y_1, \ldots, y_n\right)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n), \qquad t \in [0, \infty);$$

$$y_t = y(t+\theta), \qquad \theta \in [-n, 0], \quad t \in [0, \infty), \quad y \in C([-n, \infty], \mathbb{C}).$$

Оператор монодромии — это линейное непрерывное отображение $\mathcal{M} : C_{\mathbb{C}} \to C_{\mathbb{C}}$, определенное по формуле

$$\mathcal{M}\phi = v_p,$$

где $v : [-n, \infty) \to \mathbb{C}$ — решение начальной задачи для линеаризованного уравнения

$$v'(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t) v(t-k), \tag{2}$$

с начальным условием

$$v_0 = \phi \in C_{\mathbb{C}}. \tag{3}$$

Оператор $\mathcal{M}$ – компактный, поэтому все точки $\lambda \neq 0$ его спектра являются изолированными собственными значениями и их алгебраические кратности $m(\lambda)$ – конечны. Эти собственные значения называются мультипликаторами Флоке. Число 1, очевидно, является мультипликатором Флоке, соответствующим собственной функции x_0'.

2. Оператор $\mathcal{M} - \lambda I$ и эквивалентная краевая задача

Пусть $p = N/M$, где N, M — взаимно простые натуральные числа. Тогда $0 < nM < N$. Положим $\tau = 1/M$. Тогда $p = N\tau$, $1 = M\tau$.

Пусть $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ — заданная функция. Чтобы исследовать резольвенту оператора монодромии рассмотрим уравнение

$$\mathcal{M}\phi - \lambda\phi = \psi. \tag{4}$$

В соответствии с определением оператора монодромии это уравнение надо решать совместно с уравнением (2), рассматриваемым на интервале $(0, p)$, и условием (3). Условие (3) позволяет считать функцию ϕ сужением функции v на отрезок $[-n, 0]$.

Рассмотрим уравнение (2) отдельно на интервалах $t \in ((i-1)\tau, i\tau)$ $(i = 1, \dots, N)$ а уравнение (4) — на отрезках $t \in [(i-1)\tau, i\tau]$ $(i = -nM+1, \dots, 0)$. В полученных таким образом системах уравнений сделаем следующую замену переменных:

$$u_i(t) = v^{\phi}(t + (i-1)\tau) \quad (t \in [0, \tau];\, i = -nM+1, \dots, N), \tag{5}$$

$$b_i(t) = \psi(t + (i-1-nM)\tau) \quad (t \in [0, \tau];\, i = 1, \dots, nM). \tag{6}$$

Тогда уравнения (2) и (4) превратятся в системы уравнений (7) и (8) соответственно:

$$u_i'\big(t-(i-1)\tau\big) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t) u_{i-kM}\big(t-k-(i-kM-1)\tau\big)$$
$$(t \in ((i-1)\tau, i\tau);\; i = 1, \dots, N) \tag{7}$$

$$u_i\big(t-(i-1)\tau\big) = \frac{1}{\lambda} u_{i+N}\big(t+p-(i+N-1)\tau\big) - \frac{1}{\lambda} b_{i+nM}\big(t-(i+nM-1-nM)\tau\big)$$
$$(t \in [(i-1)\tau, i\tau];\; i = -nM+1, \dots, 0). \tag{8}$$

Обозначим через U вектор-функцию с координатами $u_1, \dots, u_N$. Благодаря формулам (3) и (5) решение ϕ уравнения (4) определяется значениями функций u_i при $i = -nM+1, \dots, 0$. Поэтому после замены переменной $t = s + (i-1)\tau$, выражая с помощью системы (8) функции u_i $(i = -nM+1, \dots, 0)$ через функции u_i $(i = 1, \dots, N)$ и исключая их из системы (7), мы получим:

$$U'(s) = \sum_{k=0}^{n} A_k(s) R_k U(s) + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} A_k(s) \Psi_k b(s) \qquad (s \in (0, \tau)), \tag{9}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\lambda} u_{i+N}(t-(i-1)\tau) - \frac{1}{\lambda}\psi(t) \qquad (t \in [(i-1)\tau, i\tau];\; i = -nM+1, \dots, 0), \tag{10}$$

где

$$A_k(s) = \operatorname{diag}\{\alpha_{ki}(s)\}_{i=1}^{N}, \qquad \alpha_{ki}(s) = \alpha_k(s + (i-1)\tau), \tag{11}$$

а элементы матриц $R_k \in \mathbb{C}^{N\times N}$ и $\Psi_k \in \mathbb{C}^{N\times nM}$ определенны следующим образом:

$$(R_k)_{ij} = \begin{cases} \delta_{j,i-kM}, & i-kM \geqslant 1; \\ \dfrac{\delta_{j,i-kM+N}}{\lambda}, & i-kM \leqslant 0; \end{cases} \qquad (\Psi_k)_{ij} = \begin{cases} 0, & i-kM \geqslant 1; \\ \dfrac{\delta_{j,i+(n-k)M}}{\lambda}, & i-kM \leqslant 0. \end{cases} \tag{12}$$

Используя определение (5) и непрерывность функции v мы получаем

$$u_{i+1}(0) - u_i(\tau) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N-1). \tag{13}$$

а из формулы (8) при $i = 0$, $t = 0$ и определения (6) мы имеем:

$$u_1(0) - \frac{1}{\lambda} u_N(\tau) = -\frac{1}{\lambda}\psi(0). \tag{14}$$

Theorem 1. *Пусть* $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ *— заданная функция. Если* $\phi \in C_{\mathbb{C}}$ *— решение уравнения* (4), *то вектор-функция* $U : [0,\tau] \to \mathbb{C}^N$, *заданная по формуле* (5), *является решением задачи* (9), $(13), (14)$. *Обратно, если* $U : [0,\tau] \to \mathbb{C}^N$ *—решение задачи* (9), $(13), (14)$, *то функция* $\phi \in C_{\mathbb{C}}$, *заданная по формуле* (10) *является решением уравнения* (4)

Доказательство. Остается доказать второе утверждение. Пусть функция $\psi \in C_{\mathbb{C}}$ задана, и пусть $U : [0,\tau] \to \mathbb{C}^N$ решение задачи (9), (13), (14).

Учитывая непрерывность функции $\psi(t)$ и равенства (13), легко видеть, что определенная формулой (10) функция ψ непрерывна в точках $t = -i\tau$ $(i = 1, \ldots, nM-1)$, т.е. принадлежит $C_{\mathbb{C}}$. Определим функцию $\overline{v} : \bigcup_{i=1}^{N}((i-1)\tau, i\tau) \to \mathbb{C}$ по формуле (5) с функцией $\overline{v}$ вместо v^{ϕ}. Из равенств (13) следует, что функцию $\overline{v}$ можно продолжить по непрерывности до функции непрерывной на отрезке $[0,\, p]$. Тогда из определенй функций ϕ и $\overline{v}$ используя краевое условие (14), получим:

$$\phi(0) - \overline{v}(0) = \left(\frac{1}{\lambda}u_N(\tau) - \frac{1}{\lambda}\psi(0)\right) - u_1(0) = 0.$$

Таким образом функция v, сужение которой на отрезки $[-n, 0]$ и $[0, p]$ совпадает с функциями ϕ и $\overline{v}$, соответственно, является непрерывной. При этом, исключая функции u_i в формуле (10) с помощью определения функции v, мы получаем формулу

$$\phi(t) = \big(v(t+p) - \psi(t)\big)/\lambda, \qquad t \in [-n, 0]. \tag{15}$$

Остается доказать, что $v = \mathcal{M}\phi$.

Рассмотрим сумму $R_k U(t) + \frac{1}{\lambda}\Psi_k b(t)$. Из определения функции v и формул (12) следует, что при $kM < i \leqslant N$ (в частности при $k = 0$)

$$\left(R_k U(t) + \frac{1}{\lambda}\Psi_k b(t)\right)_i = u_{i-kM}(t) = v(t + (i-1)\tau - k).$$

Аналогично в силу (15) при $0 < k \leqslant n$ и $0 < i \leqslant kM$ мы получаем

$$\left(R_k U(t) + \frac{1}{\lambda}\Psi_k b(t)\right)_i = \frac{u_{i-kM+N}(t)}{\lambda} - \frac{b_{i+(n-k)M}(t)}{\lambda} =$$
$$= \frac{v(t + (i-1)\tau - k + N\tau)}{\lambda} - \frac{\psi(t + (i-1)\tau - k)}{\lambda} = \phi(t + (i-1)\tau - k) = v(t + (i-1)\tau - k).$$

Поскольку здесь функция U по определению удовлетворяет уравнению (9), то, подставляя последние два равенства в тождество (9) и используя определения (11), мы получаем

$$v'(t + (i-1)\tau) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t + (i-1)\tau) v(t + (i-1)\tau - k) \qquad (i = 1, \ldots, N;\ t \in [0,\tau]]).$$

Наконец, заменяя переменную t на переменную $s = t + (i-1)\tau$, мы приходим к уравнению (2). Значит построенная функция v удовлетворяет уравнению (2). Следовательно, ϕ — решение уравнения (4). ■

3. Характеристическое уравнение

Пусть функции $\alpha_{k,i} : [0,\tau] \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, N$ и матрицы $R_k \in \mathbb{R}^{N \times N}$ $k = 0, 1, \ldots, N$, заданы по формулам (11) и (12). Обозначим через $S_\lambda : [0,\tau] \to \mathbb{C}^{N \times N}$ фундаментальную матрицу системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) такую, что $S_\lambda(0) = E$. Через $e_{\lambda j}$ обозначим j-ю строку матрицы S_λ. Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ введем матрицу $Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{N\times N}$ по формуле

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{\lambda 1}(0) - \dfrac{1}{\lambda} e_{\lambda N}(\tau) \\ e_{\lambda 2}(0) - e_{\lambda 1}(\tau) \\ \dots\dots\dots\dots \\ e_{\lambda N}(0) - e_{\lambda, N-1}(\tau) \end{pmatrix}$$

и рассмотрим функцию $q : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \lambda \mapsto det\, Q(\lambda) \in \mathbb{C}$. Функция q – аналитическая, см. [4, §10.7].

Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ мы введем также линейный непрерывный оператор $L(\lambda) : C_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^N$ по формуле

$$L(\lambda)\psi = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\lambda}\psi(0) + \dfrac{1}{\lambda}\left(S_\lambda(\tau) \displaystyle\int_0^\tau S_\lambda^{-1}(s)\Psi_\lambda(s)b(s)ds \right)_N \\ \left(S_\lambda(\tau) \displaystyle\int_0^\tau S_\lambda^{-1}(s)\Psi_\lambda(s)b(s)ds \right)_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(S_\lambda(\tau) \displaystyle\int_0^\tau S_\lambda^{-1}(s)\Psi_\lambda(s)b(s)ds \right)_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где $\Psi_\lambda(s) = \dfrac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(s)\Psi_k$ – матрично значная функция, а матрицы Ψ_k, матрично значные функции b и A_k определенны ранее по формулам (12), (6), (11). Следующее утверждение следует из теоремы 1 и метода вариации произвольных постоянных.

Lemma 1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если $\phi \in C_{\mathbb{C}}$ – решение уравнения* (4)*, то вектор-функция U, заданная формулой* (5)*, имеет вид*

$$U(t) = S_\lambda(t)c + S_\lambda(t) \int_0^t S_\lambda^{-1}(s)\Psi_\lambda(s)b(s)ds \qquad (t \in [0, \tau]), \qquad (17)$$

где $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{C}^N$ – решение уравнения

$$Q(\lambda)c = L(\lambda)\psi, \qquad (18)$$

а вектор-функция $\Psi_\lambda(s)$ определена так же как для формулы (16).

Обратно, если вектор-функция U задана формулами (17), (18)*, то функция $\phi \in C_{\mathbb{C}}$, определенная по формуле* (10)*, является решением уравнения* (4).

Theorem 2. *Нули аналитической функции $q(\lambda)$ совпадают с ненулевыми собственными значениями оператора монодромии.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – собственное значение оператора $\mathcal{M}$. Т.е. для $\psi \equiv 0$ существует $\phi \in C_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющее уравнению (4), такое, что $\phi \neq 0$. Тогда из первого утверждения леммы 1 следует, что вектор-функция, определенная по формуле (5) с помощью решения v^ϕ начальной задачи (2), (3), имеет вид:

$$U(t) = S_\lambda(t)c \quad (t \in [0, \tau]), \qquad (19)$$

где $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{C}^N$ – решение уравнения

$$Q(\lambda)c = 0. \qquad (20)$$

При этом из уравнения (4) и определения оператора монодромии следует, что значения функции v^ϕ на отрезке $[p-n, p]$ совпадают с соответствующими значениями функции ϕ на отрезке $[-n, 0]$, умноженными на λ. Значит функция v^ϕ на отрезке $[p-n, p]$ не тривиальна. Тогда вектор-функция $U(t)$ тоже не тривиальна по определению. Значит из равенства (19) получаем, что c – не нулевой вектор. Наконец из равенства (20) следует, что $q(\lambda) = det\, Q(\lambda) = 0$.

Пусть теперь λ – ноль функции q. Тогда существует решение $c = (c_1, \ldots, c_N)^T \neq 0$ уравнения (20). Пусть вектор-функция $U(t)\ :\ [0,\, \tau] \to \mathbb{C}^N$ определяется уравнением (19). Тогда по лемме 1 функция $\phi \in C_{\mathbb{C}}$, определенная по формуле

$$\phi(t) = \frac{u_{i+N}(t-(i-1)\tau)}{\lambda} \qquad \big(t \in [(i-1)\tau, i\tau];\ i = -nM+1, \ldots, 0\big), \tag{21}$$

является решением уравнения

$$\mathcal{M}\phi - \lambda\phi = 0. \tag{22}$$

Поскольку $S_\lambda(t)$ — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то $U(t) \neq 0$ $(t \in [0, \tau])$. В доказательстве леммы 1 была построена непрерывная на отрезке $[-n, p]$ функция v, являющаяся решением начальной задачи (2), (3). Причем исследуемая сейчас функция ϕ является начальной функцией для этой задачи, а сама функция v связана с вектор-функцией U по формуле (5). Допустим теперь, что указанное решение ϕ — тривиальное. Тогда решая начальную задачу (2), (3) методом шагов, получаем, что функция v — тривиальная. Значит ввиду формулы (5) вектор-функция U — тривиальная. Мы пришли к противоречию. Следовательно $\phi \neq 0$, т.е. является собственной функцией оператора $\mathcal{M}$. Тогда λ – его собственное значение. ■

Замечание. Таким образом, мы доказали совпадение ненулевых собственных значений оператора монодромии с нулями аналитической функции $q(\lambda)$ без использования дополнительных предположений. В работе [7] использовалось дополнительное условие rank $Q_{N-nM}(\lambda) = N - nM$ (при $n = 1$), где $Q_{N-nM}(\lambda)$ — матрица, полученная из $Q(\lambda)$ после удаления последних nM столбцов.

Обозначим через $\overline{M}_{k,l}$ $(k = 1,\, 2, \ldots,\, n;\ l = 1,\, 2, \ldots,\, k)$ следующие наборы индексов j, $1 \leqslant j \leqslant N$: $j \in \overline{M}_{k,l}$ для $k = 1,\, 2, \ldots,\, n$; $l = 1,\, 2, \ldots,\, k$, если выполнены три условия:

$$\begin{array}{ll} 1. & (k-l)M < j \leqslant (k-l+1)M; \\ 2. & \alpha_{k,j}(\tau) \neq 0; \\ 3. & j + iM \notin \overline{M}_{k+i,\,l} \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-k). \end{array} \tag{23}$$

Обозначим также через $M_{k,l}$ $(k = 1,\, 2, \ldots,\, n;\ l = 1,\, 2, \ldots,\, k)$ – колличество элементов в каждом из этих наборов. И определим $M_0 = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{k} M_{k,l}$. Зададим общую нумерацию всех индексов, вошедших в множества, определенные в формулах (23), в произвольном порядке. (Одинаковые индексы, входящие в разные множества $\overline{M}_{k,l}$ нумеруются отдельно.) Таким образом каждому номеру $\nu \in \{1, \ldots, M_0\}$ соответствует свой индекс $j = j_\nu$ и множество $\overline{M}_{k,l}$, которому принадлежит именно этот индекс (индексы с равными значениями могут принадлежать разным множествам). Тогда, вслед за множеством $\overline{M}_{kl}$, каждому номеру ν будет соответствовать также индекс k_ν и индекс l_ν.

Определим векторы B_ν с координатами $B_{\nu,\gamma}$ по формуле

$$B_{\nu,\gamma} = \begin{cases} \alpha_{k_\nu + (\gamma - j_\nu - 1)/M,\, \gamma - 1}(\tau), & 1 < \gamma \leqslant j_\nu + 1,\ \dfrac{\gamma - j_\nu - 1}{M} \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \text{при } \nu > 0, \tag{24}$$
$$B_{0\gamma} = \delta_{1,\gamma}.$$

Lemma 2. *Для любого $\nu \in \{0, \ldots, M_0\}$ существует функция ψ_ν такая, что $L\psi_\nu = B_\nu$.*

Доказательство. Основная идея доказательства аналогична, использованной в работе [7]. Поскольку образ оператора $L(\lambda)$ конечномерный, он замкнут. Поэтому для доказательства леммы достаточно для каждого $\nu \in \{0, \ldots, M_0\}$ найти последовательность функций $\tilde{\psi}_{\nu h} \in C_{\mathbb{C}},\ h \in \mathbb{N})$ таких, что $L(\lambda)\tilde{\psi}_{\nu h} \to B_\nu$ при $h \to \infty$, Для этого используются дельтаобразные последовательности $\tilde{\psi}'_{\nu h}$, у которых носители всех функций содержат точку $t_\nu = (-k_\nu M + j_\nu)\tau$ при $\nu > 0$ и $t_0 = 0$ при $\nu = 0$. Полученные таким образом вектора $\tilde{B}_\nu = \lim\limits_{h\to\infty} L(\lambda)\tilde{\psi}'_{\nu h}$ имеют значительно более сложный вид, чем вектора B_ν. Окончательный результат получается с помощью линейных комбинаций из уже построенных функций $\tilde{\psi}'_{\nu h}$ благодаря линейности оператора $L(\lambda)$ и структуре матрично значной функции Ψ_λ. ■

Замечание: при $n = 2$ базис в линейном пространстве, натянутом на вектора B_ν, выделяется добавлением условия $j \notin \overline{M}_{i,\,l-k+i} \qquad (i = k+1, \dots, n)$ в определении (23).

Обозначим через $j(\lambda)$ порядок нуля $\lambda \neq 0$ функции q. Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такого, что $q(\lambda) \neq 0$, положим $j(\lambda) = 0$. Обозначим через $\tilde{Q}$ матрицу, присоединенную к матрице Q, а через $\tilde{Q}^\eta$ – ее η-ую строку. Идея доказательства следующей теоремы совпадает с идеей доказательства аналогичного утверждения в работе [7].

Theorem 3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Предположим, что существует число* $\eta \in \{1, \dots, N\}$, *для которого найдется такое число* $\nu \in \{0, \dots, M_0\}$, *что* $\tilde{Q}^\eta \cdot B_\nu \neq 0$. *Тогда* $m(\lambda) = j(\lambda)$. *Кроме того,* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I) = 1$ *для каждого собственного значения* $\lambda \neq 0$ *оператора* $\mathcal{M}$.

4. О вычислении фундаментальной матрицы $S_\lambda(t)$

В теореме (3) указан способ отыскания собственных значений λ оператора $\mathcal{M}$ и их алгебраических кратностей $m(\lambda)$. Однако, для этого нужно знать фундаментальную матрицу $S_\lambda(t)$ системы (9). Пусть $\operatorname{nmod}\{a, b\} = a + ib$, где $i \in \mathbb{N}$ выбирается так, чтобы $0 < \operatorname{nmod}\{a, b\} \leqslant N$. Зафиксируем произвольное число $j_1 \in \{1, \dots, N\}$. Для $k = 2, \dots, N$ определим следующую последовательность индексов:

$$j_k = \operatorname{nmod}\{j_{k-1} + M, N\}. \tag{25}$$

Пусть для некоторого фиксированного $j \in \{1, \dots, N\}$ выполняется:

$$\alpha_{i,j_k} \equiv 0 \qquad (i, k = 1, \dots, n). \tag{26}$$

Оказывается, что 1) $j_k \neq j_s$ при $k \neq s$; 2) если в однородной системе уравнений, соответствующей системе (9) переставить уравнения так, чтобы j_k-ое уравнение оказалось на k-ом месте, то каждое из первых n уравнений интегрируется независимо от остальных уравнений, а каждое следующее уравнение интегрируется независимо от оставшихся; 3) в результате такого интегрирования мы получим N произвольных постоянных, им естественным образом соответствуют N решений системы дифференциальных уравнений, полученной после перестановки; 4) если расставить эти решения в порядке появления произвольных постоянных, то получится нижнетреугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали.

Значит условия (26) позволяют выписать фундаментальную матрицу системы (9) в явном виде. Эти условия выполняются, если, например, выполнены следующие два условия:

$$\begin{array}{ll} 1) & \partial_i f(y_0, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad \text{при } |y_i| > a_i; \\ 2) & |x(t)| > a_i \quad \text{при } t \in [(j-1)\tau - l, j\tau - l]\,; \ l \in \{i+1, \dots, i+n\}. \end{array} \tag{27}$$

Итог. Если для уравнения (1) и некоторого его периодического решения с периодом $p > n$ при некотором j выполнено условие (26), то фундаментальная матрица системы (9) вычисляется способом, предложенным в этом параграфе. Вычислив ее, мы можем составить матрицу $Q(\lambda)$. Во-первых, зная матрицу $Q(\lambda)$, мы составим функцию $q(\lambda)$ и в соответствии с теоремой 2 найдем все ненулевые собственные значения опратора $\mathcal{M}$. Во-вторых, зная матрицу $Q(\lambda)$, мы проверим выполнение условия теоремы 3. Если оно выполнено, то с помощью функции $q(\lambda)$ мы вычислим алгебраические кратности ненулевых собственных значений оператора $\mathcal{M}$ и проверим, например, является ли исследуемое периодическое решение гиперболическим.

Список литературы

[1] *O. Arino, A. Chërif*, More on ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations// J. Mathematical Analysis and Applications. 1993. V.180. № 2. P.361-385.

[2] *S. N. Chow, H.-O. Walther*. Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of $\dot{x}(t) = g\left(x(t-1)\right)$// Transactions of the A.M.S. 1988. V.307. № 1. P. 127-142.

[3] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*, Линейные операторы. Часть I: Общая теория. Москва, УРСС, 2004.

[4] *Ж. Дьедонне*, Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

[5] *J. Hale*, Theory of functional differential equations, N.Y., Heidelberg, Berlin, Springer Verlag,1977.

[6] *J. L. Kaplan, J. A. Yorke*, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of delay differential equations// J. Mathematical Analysis and Applications. 1974. V. 48. № 1. P. 317-324.

[7] *Х.-О. Вальтер, А. Л. Скубачевский*, О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. //Труды Московского Математического Общества. 2003. Т.64. Стр. 3-53.

[8] *Х.-О. Вальтер, А. Л. Скубачевский*, О спектре оператора монодромии для медленно осциллирующих периодических решений функционально дифференциальных уравнений. //Доклады Академии Наук. 2002. Т.384. №4, стр. 442-445.

[9] *Х.-О. Вальтер, А. Л. Скубачевский.* О гиперболичности быстро осциллирующих периодических решений функционально-дифференциальных уравнений. //Функц. анализ и его приложения. 2005. Т.39. вып.1, Стр. 82-85.

[10] *Х.-О. Вальтер, А. Л. Скубачевский.* О гиперболичности решений с иррациональными периодами некоторых функционально-дифференциальных уравнений. //Доклады АН. 2005. Т.402. №2, Стр. 151-154.

ОДНА КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА С ПОБОЧНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ И УЧЕТОМ РИСКОВ [1]

Жуковский В.И.*, Кудрявцев К.Н.**
* РосЗИТЛП, Москва, Россия
** ЧГАУ, Челябинск, Россия

Формализуется гарантированное по выигрышам и рискам решение кооперативной игры с побочными платежами и при неопределенности. Для линейно-квадратичного варианта игры установлены коэффициентные условия существования такого решения.

1. Постановка задачи

Рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{\mathrm{X}\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle. \tag{1.1}$$

Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков, $\mathrm{X}_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ -множество стратегий x_i у i-го игрока. Например, в экономических задачах "роль"стратегий могут выполнять цены (устанавливаемые продавцом), объемы поставок, премии и другие меры поощрения и наказания. О неопределенностях $y \in \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ игроки не имеют каких-либо статистических данных, известны только границы изменения неопределенностей. Неопределенностями могут быть, например, погодные условия, неожиданные скачки арендной платы и стоимости перевозок товара, непредсказуемые изменения налогового и таможенного законодательства и т.п.

В результате совместного выбора игроками своих стратегий $x_i \in \mathrm{X}_i$ $(i = 1, 2)$ складывается ситуация $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n = n_1 + n_2)$. Независимо от действий игроков реализуется некоторая неопределенность $y \in \mathrm{Y}$. На образовавшихся в результате парах $(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ определена скалярная функция выигрыша i-го игрока $f_i(x, y) : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$. Значение функции выигрыша $f_i(x, y)$ на реализовавшейся ситуации x и появившейся независимо неопределенности y назовем *предварительным выигрышем* i-го игрока. Полученный таким образом суммарный выигрыш $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ игроки предполагают в дальнейшем перераспределить между собой.

На "содержательном уровне"цель i-го игрока состоит в выборе такой своей стратегии и такого перераспределения выигрышей, чтобы полученный в результате его перераспределенный выигрыш стал возможно *большим*, а риск (определенный ниже) возможно *меньшим.*

Замечание 1.1. До настоящего времени при формализации гарантированного решения кооперативных игр с побочными платежами и при неопределенности [1] риски не учитывались. Поэтому предлагаемая статья является первой попыткой в этом направлении.

2. Формализация решения

Следуя принципу минимаксного сожаления Сэвиджа [2] и "кооперативному характеру"игры (1.1) введем специальную функцию риска i-го игрока. Для этого рассмотрим двухкритериальную задачу (при каждой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$):

$$\Gamma(y) = \langle \mathrm{X}, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle, \tag{2.1}$$

которую получаем из игры (1.1), фиксируя $y \in \mathrm{Y}$.

В (2.1) ЛПР (лицо, принимающее решение) за счет подходящего выбора альтернативы $x \in \mathrm{X}$ стремится достичь возможно больших значений одновременно обоих критериев $f_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$.

Ситуация $x^P(y)$ $\forall y \in Y$ называется [3] *максимальной по Парето* (эффективной) альтернативой в задаче (2.1), если при любых $x \in \mathrm{X}$ (и для каждого $y \in Y$) несовместна система неравенств

$$f_i(x, y) \geq f_i(x^P(y), y)(i = 1, 2) \tag{2.2}$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №05-01-00419)

В теории многокритериальных задач установлено следущее утверждение [3]:
Если существуют альтернатива $x^P(y)$ и число $\alpha \in (0,1)$ такие, что

$$\max_{x\in \mathrm{X}}[\alpha f_1(x,y) + (1-\alpha) f_2(x,y)] = Idem[x \to x^P(y)] \quad \forall y \in Y, \tag{2.3}$$

то $x^P(y)$ является максимальной по Парето в задаче (2.1) при каждом $y \in \mathrm{Y}$.
В (2.3) и далее $Idem[x \to x^P(y)]$ означает левую скобку [...], где x заменено на $x^P(y)$.

С помощью $x^P(y)$ введем функцию риска $\Phi_i(x,y)$ для фунции выигрыша $f_i(x,y)$ в виде

$$\Phi_i(x,y) = f_i(x^P(y), y) - f_i(x,y) \quad (i = 1,2), \tag{2.4}$$

значение которой назовем риском игрока i.

В [4] установлено: если множества X_i и Y есть непустые компакты, а функции $f_i(x,y)$ непрерывны на $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ $(i = 1,2)$, то функции риска (2.4) также непрерывны на $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Функция $\Phi_i(x,y)$ численно оценивает риск (сожаление) i-го игрока в том, что он выбрал свою стратегию из ситуации x, а не из $x^P(y)$, хотя последняя и доставляет векторный максимум в двухкритериальной задаче (2.1).

Пусть игроки в игре (1.1), выбирая свои стратегии, ориентируются не только на возможно большие предварительные выигрыши, но одновременно и на возможно меньшие риски (значения функции риска (2.4)). Учитывая это, игре (1.1) поставим в соответствие вспомогательную кооперативную игру двух лиц при неопределенности и с побочными платежами

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y), -\Phi_i(x,y)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{2.5}$$

В игре (2.5) множества X_i, Y и функции $f_i(x,y)$ те же, что и в игре (1.1). Отличие лишь в том, что функция выигрыша i-го игрока в игре (2.5) стала векторной $(f_i(x,y), -\Phi_i(x,y))$, причем вторая компонента специально взята со знаком "минус". Поэтому, если в игре (2.5) игроки стремятся к возможно большим значениям одновременно обеих компонент своей функции выигрыша, то тем самым они увеличивают выигрыш $f_i(x,y)$ и одновременно уменьшают риск $\Phi_i(x,y)$.

Для функции выигрыша $f_i(x,y)$ $(i = 1,2)$ введем следущие максимины $f_i^0[y]$ и максиминные стратегии $x_i^0(y)$:

$$\begin{aligned} f_1^0[y] &= \max_{x_1\in \mathrm{X}_1} \min_{x_2\in \mathrm{X}_2} f_1(x_1,x_2,y) = \min_{x_2\in \mathrm{X}_2} f_1(x_1^0(y), x_2, y), \\ f_2^0[y] &= \max_{x_2\in \mathrm{X}_2} \min_{x_1\in \mathrm{X}_1} f_2(x_1,x_2,y) = \min_{x_1\in \mathrm{X}_1} f_2(x_1, x_2^0(y), y), \forall y \in \mathrm{Y}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Аналогично для функций риска $\Phi_i(x,y)$ $(i = 1,2)$

$$\begin{aligned} \Phi_1^0[y] &= \min_{x_1\in \mathrm{X}_1} \max_{x_2\in \mathrm{X}_2} \Phi_1(x_1,x_2,y), \\ \Phi_2^0[y] &= \min_{x_2\in \mathrm{X}_2} \max_{x_1\in \mathrm{X}_1} \Phi_2(x_1,x_2,y), \forall y \in \mathrm{Y}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Утверждение 2.1 *Если в игре* (2.5) *множества* X_i $(i = 1,2)$, Y *суть компакты, а функции* $f_i(x,y)$ *и* $\Phi_i(x,y)$ $(i = 1,2)$ *непрерывны на* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, *то функции* $f_i^0[y]$ *и* $\Phi_i^0[y]$ $(i = 1,2)$ *непрерывны на* Y.

Справедливость утверждения 2.1 следует из непрерывности функции $\varphi(y) = \max_{x\in \mathrm{X}} \psi(x,y)$ по y, если только функция $\psi(x,y)$ непрерывна на произведении компактов $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ [5,стр30-31].

Фиксируем некоторую неопределенность $y \in \mathrm{Y}$ и введем множество $\overline{\mathrm{X}}(y)$ ситуаций $x \in \mathrm{X}$, удовлетворяющих *условию индивидуальной рациональности* в игре (1.1):

$$\overline{\mathrm{X}}(y) = \{x \in \mathrm{X} : f_i(x,y) \geq f_i^0[y] \quad (i = 1,2)\} \quad \forall y \in \mathrm{Y}, \tag{2.8}$$

и множество $\overline{\overline{\mathrm{X}}}(y)$ ситуаций, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности для функций риска

$$\overline{\overline{\mathrm{X}}}(y) = \{x \in \mathrm{X} : \Phi_i(x,y) \leq \Phi_i^0[y] \quad (i = 1,2)\} \quad \forall y \in \mathrm{Y}. \tag{2.9}$$

Утверждение 2.2 *Если в игре* (2.5) *функции* $f_i(x,y)$ $(i = 1,2)$ *непрерывны на произведении компактов* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, *то при любом фиксированном* $y \in \mathrm{Y}$ *множество* $\overline{\mathrm{X}}(y)$ *- непусто.*

В самом деле, согласно (2.6),

$$f_1^0[y] = \min_{x_2\in \mathrm{X}_2} f_1(x_1^0(y), x_2, y) \leq f_1\left(x_1^0(y), x_2^0(y), y\right),$$

$$f_2^0[y] = \min_{x_1\in \mathrm{X}_1} f_2(x_1, x_2^0(y), y) \leq f_2\left(x_1^0(y), x_2^0(y), y\right) \ \ \forall y \in \mathrm{Y},$$

тогда ситуация $\left(x_1^0(y), x_2^0(y)\right) \in \overline{\mathrm{X}}$.

Лемма 2.1. *Множества* $\overline{\mathrm{X}}(y)$ *и* $\overline{\overline{\mathrm{X}}}(y)$ *совпадают при каждом* $y \in \mathrm{Y}$.

Доказательство. Пусть для фиксированной неопределенности $y \in \mathrm{Y}$ какая-либо ситуация $x = (x_1, x_2) \in \overline{\overline{\mathrm{X}}}(y)$, тогда

$$f_i(x,y) - f_i(x^P(y), y) = -\Phi_i(x,y) \geq -\Phi_i^0[y] =$$

$$\max_{x_i\in \mathrm{X}_i}\min_{x_j\in \mathrm{X}_j}\left[-f_i(x^P(y), y) + f_i(x,y)\right] = -f_i(x^P(y), y) + \max_{x_i\in \mathrm{X}_i}\min_{x_j\in \mathrm{X}_j}\left[f_i(x_1, x_2, y)\right] =$$

$$= -f_i(x^P(y), y) + f_i^0[y] \quad (i, j = 1, 2; i \neq j).$$

Отсюда $f_i(x,y) \geq f_i^0[y]$, следовательно,

$$\overline{\overline{\mathrm{X}}}(y) \subseteq \overline{\mathrm{X}}(y) \quad \forall y \in \mathrm{Y}. \tag{2.10}$$

Установим обратное включение. Пусть при фиксированном $y \in \mathrm{Y}$ какая-либо ситуация $x = (x_1, x_2) \in \overline{\mathrm{X}}(y)$, именно,

$$f_i(x,y) \geq f_i^0[y] \quad \forall y \in \mathrm{Y}.$$

Прибавив к обоим частям этого неравенства не зависящее от ситуации x число $-f_i(x^P(y), y)$, имеем

$$-f_i(x^P(y), y) + f_i(x,y) \geq f_i^0[y] - f_i(x^P(y), y)$$

или

$$-\Phi_i(x,y) \geq \max_{x_i\in \mathrm{X}_i}\min_{x_j\in \mathrm{X}_j}\left[f_i(x_1, x_2, y)\right] - f_i(x^P(y), y) =$$

$$\max_{x_i\in \mathrm{X}_i}\min_{x_j\in \mathrm{X}_j}\left[f_i(x_1, x_2, y) - f_i(x^P(y), y)\right] = -\Phi_i^0[y] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_i(x,y) \leq \Phi_i^0[y] \quad \forall y \in \mathrm{Y},$$

т.е. $\overline{\mathrm{X}}(y) \subseteq \overline{\overline{\mathrm{X}}}(y)$ $\forall y \in \mathrm{Y}$.

Учитывая (2.10), получаем $\overline{\mathrm{X}}(y) = \overline{\overline{\mathrm{X}}}(y)$.

В дальнейшем будем предполагать, что каждый игрок может передать партнеру часть своего выигрыша и часть риска. При этом считаем, что выигрыши суммируются только с выигрышами, а риски с рисками.

Ниже используются вектора $f = (f_1, f_2)$ и $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ и полагается, что применяемые в следующем определении максимумы и минимумы достигаются, а функции выигрыша $f_i(x,y)$ и риска $\Phi_i(x,y)$ непрерывны на $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Определение 2.1. Гарантированным по выигрышам и рискам решением кооперативной игры двух лиц с побочными платежами и при неопределенности называется тройка (x^*, f^*, Φ^*), для которой существует неопределенность $y_p \in \mathrm{Y}$ такая, что выполняются следующие три условия:

1^0. *условие коллективной рациональности*

$$\max_{x\in \mathrm{X}}\sum_{i=1}^{2} f_i(x, y_p) = Idem[x \to x^*]; \tag{2.11}$$

2^0. *условие "неухудшаемости"суммарного выигрыша и риска*

$$\min_{y\in \mathrm{Y}}\sum_{i=1}^{2}\left[f_i(x^*, y) - \Phi_i(x^*, y)\right] = Idem[y \to y_p]; \tag{2.12}$$

3^0. *условие индивидуальной рациональности:* если

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x^*, y_p) = \sum_{i=1}^{2} f_i^* \quad \bigwedge \quad \sum_{i=1}^{2}\Phi_i(x^*, y_p) = \sum_{i=1}^{2}\Phi_i^*,$$

то справедлива система из четырех неравенств

$$f_i^* \geq f_i^0[y], \quad \Phi_i^* \leq \Phi_i^0[y] \quad (i=1,2) \quad \forall y \in \mathrm{Y}. \tag{2.13}$$

При этом пару $f^* = (f_1^*, f_2^*)$ назовем *гарантированным векторным дележом*, пару $\Phi^* = (\Phi_1^*, \Phi_2^*)$ - *гарантированным векторным риском* игры (1.1), а x^* - ситуацией, гарантирующей эти дележи и риски.

Замечание 2.1. Если функция $f_1(x,y)$ сильно выпукла по x_2, а функция $f_2(x,y)$ сильно выпукла по x_1, то максимины $f_i^0[y]$ $(i=1,2)$ не существуют и, следовательно, условие (2.13) в определении 2.1. учитывать не нужно [1].

Лемма 2.2. *Имеют место следующие эквиваленции*

$$[(2.11)] \quad \Leftrightarrow \left[\min_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{2} \Phi_i(x, y_p) = Idem[x \to x^*]\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\max_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{2} [f_i(x, y_p) - \Phi_i(x, y_p)] = Idem[x \to x^*]\right].$$

Доказательство. Приведенные здесь эквиваленции имеют место, поскольку, с учетом (2.4),

$$\max_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{2} [f_i(x, y_p) - \Phi_i(x, y_p)] = \max_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{2} [2f_i(x, y_p) - f_i(x^p(y_p), y_p)] =$$

$$= 2\max_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{2} f_i(x, y_p) - \sum_{i=1}^{2} f_i(x^p(y_p), y_p),$$

а

$$\sum_{i=1}^{2} f_i(x^p(y_p), y_p)$$

не зависит явно от x.

Замечание 2.2. Пара (x^*, y_p), найденая из требований 1^0. и 2^0. определения 2.1. является седловой точкой для антагонистической игры

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \sum_{i=1}^{2} [f_i(x,y) - \Phi_i(x,y)] \rangle,$$

то есть

$$\max_{x\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{2} [f_i(x, y_p) - \Phi_i(x, y_p)] = \sum_{i=1}^{2} [f_i(x^*, y_p) - \Phi_i(x^*, y_p)] = \min_{y\in \mathrm{Y}} \sum_{i=1}^{2} [f_i(x^*, y) - \Phi_i(x^*, y)].$$

Действительно, левое неравенство установлено в лемме 2.2, а правое совпадает с (2.12).

Следующее утверждение устанавливает принципиальную возможность распределения между игроками суммарного выигрыша $f_1^* + f_2^*$ и суммарного риска $\Phi_1^* + \Phi_2^*$ таким образом, чтобы выполнялось условие индивидуальной рациональности (2.13).

Лемма 2.3. *Для суммарного выигрыша $f_1^* + f_2^*$ и суммарного риска $\Phi_1^* + \Phi_2^*$ справедливы следующие неравенства*

$$f_1^* + f_2^* \geq f_1^0[y_p] + f_2^0[y_p], \tag{2.14}$$

$$\Phi_1^* + \Phi_2^* \leq \Phi_1^0[y_p] + \Phi_2^0[y_p]. \tag{2.15}$$

Доказательство. Согласно (2.11) суммарный выигрыш

$$f_1^* + f_2^* = f_1(x^*, y_p) + f_2(x^*, y_p) = \max_{x\in \mathrm{X}} [f_1(x, y_p) + f_2(x, y_p)] \geq f_1(x, y_p) + f_2(x, y_p)$$

для любой ситуации $x \in \mathrm{X}$, в частности для ситуации $x = (x_1^0(y_p), x_2^0(y_p))$, найденной из (2.6). Следовательно,

$$f_1^* + f_2^* \geq \sum_{i=1}^{2} f_i(x_1^0(y_p), x_2^0(y_p), y_p) \geq$$

$$\geq \min_{x_2 \in \mathrm{X}_2} f_1(x_1^0(y_p), x_2, y_p) + \min_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_2(x_1, x_2^0(y_p), y_p) = f_1^0[y_p] + f_2^0[y_p].$$

Аналогично устанавливается неравенство (2.15).

Лемма 2.4. *Имеет место следующая импликация*

$[(2.12)] \Rightarrow$ *несовместна система из четырех неравенств*

$$f_i(x^*, y) \leq f_i^*, \quad \Phi_i(x^*, y) \geq \Phi_i^* \quad \forall y \in \mathrm{Y} \quad (i = 1, 2) \tag{2.16}$$

из которых хотя бы одно строгое.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует неопределенность $\overline{y} \in \mathrm{Y}$ такая, что совместна система из четырех неравенств

$$\begin{cases} \;\; f_i(x^*, \overline{y}) \leq f_i^* \\ -\Phi_i(x^*, \overline{y}) \leq -\Phi_i^* \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

Складывая левые и правые части неравенств, получим

$$\sum_{i=1}^{2} \left[f_i(x^*, \overline{y}) - \Phi_i(x^*, \overline{y}) \right] < \sum_{i=1}^{2} f_i^* - \sum_{i=1}^{2} \Phi_i^* = \sum_{i=1}^{2} \left[f_i(x^*, y_p) - \Phi_i(x^*, y_p) \right],$$

что противоречит (2.12).

Следствие 2.1. *Из леммы 2.4. следует, что неопределенность $y_p \in \mathrm{Y}$, найденная из* (2.12), *является минимальной по Парето в четырехкритериальной задаче*

$$\left\langle \mathrm{Y}, \{ f_i(x^*, y), -\Phi_i(x^*, y) \}_{i=1,2} \right\rangle.$$

Отсюда получаем, что при использовании игроками ситуации x^* и реализации любой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$ выигрыши игроков $f_i(x^*, y)$ $(i = 1, 2)$ не могут стать одновременно меньше соответствующих компонент f_i^* вектора $f^* = (f_1^*, f_2^*)$, а риски $\Phi_i(x^*, y)$ $(i = 1, 2)$ одновременно больше Φ_i^* - компонент гарантированного векторного риска $\Phi^* = (\Phi_1^*, \Phi_2^*)$. В этом состоит "гарантирующий смысл"условия (2.12).

3. Линейно-квадратичная игра

В качестве приложения рассмотрим следующую линейно-квадратичную кооперативную игру двух лиц с побочными платежами и при неопределенности

$$\left\langle \{1, 2\}, \{ \mathrm{X}_i = \mathbb{R}^n \}_{i=1,2}, \mathrm{Y} = \mathbb{R}^m, \{ f_i(x, y) \}_{i=1,2} \right\rangle. \tag{3.1}$$

Здесь стратегии i-го игрока $x_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$, ситуации $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n}$, неопределенности $y \in \mathbb{R}^m$, функция выигрыша i-го игрока линейно-квадратична:

$$f_i(x, y) = x_i' A_{ii} x_i + 2x_1' B y + y' C_i y + 2a_{i1}' x_1 + 2a_{i2}' x_2 \quad (i = 1, 2), \tag{3.2}$$

где матрицы соответствующих размерностей A_{ii}, B и C_i постоянны, причем A_{ii} и C_i симметричны, n-вектора a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ также постоянны; штрих сверху означает операцию транспонирования.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&C = C_1 + C_2, \quad C_\alpha = \alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2, \\
&a_i = a_{1i} + a_{2i} \; (i = 1, 2), \quad a_{\alpha i} = \alpha a_{1i} + (1 - \alpha) a_{2i} \; (i = 1, 2), \\
&k_1 = B' A_{11}^{-1} \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^2 a_{21} - a_{11} \right], \quad k_2 = -B' A_{11}^{-1} \left[a_{11} + \frac{2 - \alpha}{\alpha} a_{21} \right], \quad k = k_1 + k_2, \\
&\gamma_1 = \frac{1}{\alpha^2} a_{\alpha 1}' A_{11}^{-1} a_{\alpha 1} - \frac{2}{\alpha} a_{11}' A_{11}^{-1} a_{\alpha 1} - \frac{2}{1 - \alpha} a_{12}' A_{22}^{-1} a_{\alpha 2}, \\
&\gamma_2 = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} a_{\alpha 2}' A_{22}^{-1} a_{\alpha 2} - \frac{2}{\alpha} a_{21}' A_{11}^{-1} a_{\alpha 1} - \frac{2}{1 - \alpha} a_{22}' A_{22}^{-1} a_{\alpha 2}, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

число $\alpha \in (0; 1)$.

Далее $A<0$ ($>$, $\geq$, $\leq$) означает, что квадратичная форма $z'Az$ определенно отрицательна (определенно положительна, неотрицательна, неположительна).

Утверждение 3.1 *Если $A_{ii}<0$ $(i=1,2)$, то для игры* (3.1) *функции риска* (2.4) *имеют вид*

$$\begin{aligned}\Phi_1(x,y)&=\frac{1-2\alpha}{\alpha^2}y'B'A_{11}^{-1}By+2[k_1'-x_1'B]y+\gamma_1-x_1'A_{11}x_1-2a_{11}'x_1-2a_{12}'x_2,\\ \Phi_2(x,y)&=-\frac{2}{\alpha}y'B'A_{11}^{-1}By+2[k_2'-x_1'B]y+\gamma_2-x_2'A_{22}x_2-2a_{21}'x_1-2a_{22}'x_2,\end{aligned} \tag{3.4}$$

где постоянная $\alpha\in(0,1)$, а вектора k_i и числа γ_i $(i=1,2)$ определены в (3.3).

Доказательство. Прежде чем перейти к построению функций риска (2.4) найдем максимальную по Парето альтернативу $x^p(y)$ в двухкритериальной задаче

$$\Gamma(y)=\left\langle \mathrm{X}=\mathbb{R}^{2n},\{f_i(x,y)\}_{i=1,2}\right\rangle. \tag{3.5}$$

полученной из игры (3.1) при каждой фиксированной неопределенности $y\in\mathrm{Y}$.

Для этого, следуя [3], построим функцию

$$\varphi(x,y)=\alpha f_1(x,y)+(1-\alpha)f_2(x,y)=$$
$$=\alpha x_1'A_{11}x_1+(1-\alpha)x_2'A_{22}x_2+2x_1'By+y'C_\alpha y+2a_{\alpha1}'x_1+2a_{\alpha2}'x_2$$

где постоянная $\alpha\in(0,1)$.

Поскольку $A_{ii}<0$ $(i=1,2)$, то при каждом фиксированном $y\in\mathrm{Y}$ функция $\varphi(x,y)$ достигает максимума на ситуации $x^p(y)$, найденной из условий

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}\Big|_{x_i=x_i^P(y)}=0_n,\quad \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x_i^2}=2A_{ii}<0\quad(i=1,2). \tag{3.6}$$

Равенства из (3.6) имеют вид

$$\begin{cases}\alpha A_{11}x_1^p(y)+By+a_{\alpha1}=0_n\\ (1-\alpha)A_{22}x_2^p(y)+a_{\alpha2}=0_n,\end{cases}$$

где 0_n - нулевой n-вектор. Отсюда

$$\begin{aligned}x_1^p(y)&=-\frac{1}{\alpha}A_{11}^{-1}(By+a_{\alpha1}),\\ x_2^p(y)&=-\frac{1}{1-\alpha}A_{22}^{-1}a_{\alpha2}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Учитывая (2.4), получим справедливость (3.4).

Утверждение 3.2 *Если $A_{ii}<0$, $C_i>0$ $(i=1,2)$ и $\alpha\in(0,1/4)$, то для игры* (3.1) *существует гарантированное по выигрышам и рискам решение.*

Доказательство. Построим функции

$$\psi(x,y)=\sum_{i=1}^{2}f_i(x,y),\quad \chi(x,y)=\sum_{i=1}^{2}[f_i(x,y)-\Phi_i(x,y)],$$

где

$$\psi(x,y)=x_1'A_{11}x_1+x_2'A_{22}x_2+4x_1'By+y'Cy+2a_1'x_1+2a_2'x_2,$$
$$\chi(x,y)=2x_1'A_{11}x_1+2x_2'A_{22}x_2+2[4x_1'B-k']y+y'\left[C-\frac{1-4\alpha}{\alpha^2}B'A_{11}^{-1}B\right]y+4a_1'x_1+4a_2'x_2-\gamma.$$

Согласно замечанию 2.2, гарантированное по выигрышам и рискам решение игры (3.1) существует, если

$$\begin{cases}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x_i^2}=2A_{ii}<0\quad(i=1,2)\\ \frac{\partial^2\chi(x,y)}{\partial y^2}=C-\frac{1-4\alpha}{\alpha^2}B'A_{11}^{-1}B>0\end{cases} \tag{3.8}$$

Первое требование в (3.8) имеет место в силу $A_{ii}<0$ $(i=1,2)$.

Справедлива также цепочка импликаций

$$[A_{11}<0]\ \Rightarrow\ [A_{11}^{-1}<0]\ \Rightarrow\ [B'A_{11}^{-1}B\leq 0]\ \Rightarrow\ [-B'A_{11}^{-1}B\geq 0],$$

число $\frac{1-4\alpha}{\alpha^2} > 0$, т.к. $\alpha \in (0, 1/4)$.
Тогда

$$-\frac{1-4\alpha}{\alpha^2} B' A_{11}^{-1} B \geq 0$$

и поэтому

$$[C_i > 0 \ \ (i = 1, 2)] \ \Rightarrow \ [C = C_1 + C_2 > 0],$$

$$[C_i > 0 \ \ (i = 1, 2)] \ \wedge \ [-\frac{1-4\alpha}{\alpha^2} B' A_{11}^{-1} B \geq 0] \ \Rightarrow \ [C - \frac{1-4\alpha}{\alpha^2} B' A_{11}^{-1} B > 0].$$

Список литературы

[1] *Жуковский В.И.* Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.: Едиториал УРСС 340 с., 1999.

[2] *Savage L.Y.* The theory of statistical decusion. //J. American Statistic Association. №46. P 55-67. 1951.

[3] *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето - оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 256 с., 1982.

[4] *Жуковский В.И., Жуковская Л.В.* Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. М.: Едиториал УРСС 272 с., 2004.

[5] *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука 520 с., 1985.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №05-01-00419).

В.И. Жуковский, Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности, Москва, Россия

E-mail: rzitlpoz@rambler.ru

К.Н. Кудрявцев, Челябинский государственный агроинженерный университет, Челябинск, Россия

E-mail: kudrk@mail333.com

STATIONARY TRANSPORT EQUATIONS; THE CASE WHEN THE SPECTRUM OF COLLISION OPERATORS HAS A NEGATIVE PART

Karabash I.M.
Donetsk National University,
Donetsk, Ukraine

Consider the boundary value problem

$$w(\mu)\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\mu)=\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}(x,\mu)-q(\mu)\psi(x,\mu)\qquad (0<x<\infty,\ \mu\in\mathcal{I})\tag{0.1}$$

$$\psi(0,\mu)=\phi_+(\mu)\qquad\text{if}\quad w(\mu)>0,\tag{0.2}$$

$$\int\limits_{\mathcal{I}}|\psi(x,\mu)|^2|w(\mu)|d\mu=O(1)\qquad\text{as}\quad x\to\infty,\tag{0.3}$$

$$\psi(x,\mu)\text{ satisfies self-adjoint boundary conditions}$$
$$\text{of the differential operator}\quad L:y\mapsto\frac{1}{|w|}(-y''+qy).\tag{0.4}$$

Here $\mathcal{I}$ is a finite or infinite interval, the weight function w changes its sign on $\mathcal{I}$. We assume that w and q is locally summable and $w(\mu)\neq 0$ a.e. The operator $L_{col}:y\mapsto -y''+qy$ is called a collision operator. We assume that the operator L (defined by the expression $|w|^{-1}L_{col}$) is endowed with boundary conditions that make it into a self-adjoint Sturm-Liouville operator in the Hilbert space $L^2(\mathcal{I},|w(x)|dx)$. Boundary value problems of this (forward-backward) type arise as various kinetic equations (e.g., [2, 6]; for other applications of Eq. (0.5) see [19], [17] and references).

The formal similarity between Eqs. (0.1)-(0.4) and the half-space problems of neutron transport, radiative transfer, and rarefied gas dynamics has given rise to the emergence of abstract kinetic equation theory [7, 2, 13, 6]. In this paper we will consider the abstract kinetic equation in the following form:

$$\frac{d\psi}{dx}=-JL\psi(x)\qquad(0<x<\infty),\tag{0.5}$$

where J and L are operators in the abstract Hilbert space H such that $J=J^{-1}=J^*$ is an *signature operator* in H and L is a self-adjoint (bounded or unbounded) operator. By $P_\pm$ we denote the orthogonal projections onto $H_\pm:=\ker(J\mp I)$; clearly, $J=P_+\oplus P_-$. The problem is to find continuous functions $\psi:[0,+\infty)\to H$ which is H-differentiable on $(0,\infty)$ and satisfies Eq. (0.5) with the following boundary conditions

$$P_+\psi(0)=\phi_+,\tag{0.6}$$

$$\|\psi(x)\|_H=O(1)\qquad(x\to+\infty);\tag{0.7}$$

here $\phi_+\in H_+$ is a given vector. If we define L by (0.4) and put $H=L^2(\mathbb{R},|w(\mu)|d\mu)$, $(Jf)(\mu):=(\operatorname{sgn}w(\mu))f(\mu)$, we get problem (0.1)-(0.4).

The case when L is nonnegative and has discrete spectrum has been described in great detail in [2, 8, 6, 18] (see also [14, 17] for the case when $\operatorname{Re}L:=(L+L^*)/2\geq 0$).

The aim of this paper is to remove both assumptions mentioned above. In Section 2 we use results from [4, Section 5] to extend the approach of [7, 2, 8] to positive operators L with a nonempty continuous spectrum. Problem (0.5)-(0.7) with the operator L such that $\sigma(L)\cap\mathbb{R}_-\neq\emptyset$ is considered in Section 3. Our method is based on the spectral theory of definitizable operators in Krein spaces (see [12, 3]) and results from [5, 10, 11].

Notation. Let T be a linear operator in a Hilbert space H. In what follows $\operatorname{dom}(T)$, $\ker T$, $\operatorname{ran}T$ are the domain, kernel, range of T, respectively. We denote by $\sigma(T)$ the spectrum of T. We write $f\in AC_{loc}(\mathbb{R})$ if the function f is absolutely continuous on each bounded interval in $\mathbb{R}$.

1. Preliminaries

In this subsection we collect some definitions and statements from the theory of linear operators in a Krein space. The reader can find more details in [12, 1].

Consider a Hilbert space H with a scalar product $(\cdot,\cdot)$. Let J be an operator in H such that $J = J^{-1} = J^*$ and let $[\cdot,\cdot] := (J\cdot,\cdot)$. Then the pair $K = (H, [\cdot,\cdot])$ is a *Krein space* (see [12, 1] for the original definition). If $J \neq I$, then the form $[\cdot,\cdot]$ is *an indefinite inner product.*

Let T be a closely defined operator in H; $T^{[*]}$ denotes *J-adjoint operator* of T defined on the set of all $g \in H$ such that $f \mapsto [Tf, g]$ is a continuous linear functional on $\operatorname{dom}(T)$ by the relation $[Tf, g] = [f, T^{[*]}g]$, $f \in \operatorname{dom}(T)$. Clearly, $T^{[*]} = JT^*J$, where T^* is the adjoint operator with respect to the scalar product $(\cdot,\cdot)$.

An operator T is called J-nonnegative if $[Tf, f] \geq 0$ for $f \in \operatorname{dom}(T)$. An operator T is said to be *J-self-adjoint*, if $T = T^{[*]}$.

Definition 1 ([12])**.** A J-self-adjoint operator T is called definitizable if $\rho(T) \neq \emptyset$ and there exist a real polynomial p such that $[p(T)f, f] \geq 0$ for $f \in \operatorname{dom}(p(T))$; the polynomial p is called a definitizing polynomial.

Let T be a definitizable operator. Then by [12, Proposition 2.1], the nonreal spectrum of T consist of finite number of eigenvalues of finite Riesz index. Consequently, there exists the Riesz spectral projection $E_{\mathbb{C}}$ corresponding to $\sigma(T) \setminus \mathbb{R}$; the operators $E_{\mathbb{C}}$ and $E_{\mathbb{R}} := I - E_{\mathbb{C}}$ are bounded J-self-adjoint projections. Denote $c(T) := (\cap N(p)) \cap \sigma(T) \cap \mathbb{R}$, where $N(p)$ is the set of zeroes of the polynomial p, and the first intersection runs over all definitizing polynomials p of T. Let $\mathfrak{S}_T$ be the semiring which consist of all bounded intervals of R with endpoints not in $c(T)$ and their complements in $\mathbb{R}$.

Theorem 1 ([12])**.** *Let T be a definitizable operator. Then there exist a mapping $\Delta \to E(\Delta)$ from $\mathfrak{S}_T$ into the set of bounded linear operators in H with the following properties ($\Delta, \Delta' \in \mathcal{S}_T$):*

- **(E1):** $E(\Delta \cap \Delta') = E(\Delta)E(\Delta')$, $\quad E(\emptyset) = 0$, $\quad E(\mathbb{R}) = E_{\mathbb{R}}$, $\quad E(\Delta) = E(\Delta)^{[*]}$*;*
- **(E2):** $E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta')$ *, if* $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$*;*
- **(E3):** *the form $\pm[\cdot,\cdot]$ is positive on $E(\Delta)H$, if $\pm p(t) > 0$ on $\overline{\Delta} \cap \sigma(T)$ for some definitizing polynomial p of T;*
- **(E4):** *$E(\Delta)$ is in the double commutant of the resolvent of T and $\sigma(A \restriction E(\Delta)H) \subset \overline{\Delta}$;*
- **(E5):** *if Δ is bounded, then $E(\Delta)H \subset \operatorname{dom}(T)$ and $T \restriction E(\Delta)H$ is a bounded operator.*

According to [12], a number $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ is called *a critical point* of T, if for each $\Delta \in \mathfrak{S}_T$ such that $s \in \Delta$ the form $[\cdot,\cdot]$ is indefinite on $E(\Delta)H$. By $\tilde{c}(T)$ denote the set of critical points. Properties (E3)-(E5) imply that $c(T) \subset \tilde{c}(T) \subset c(T) \cup \{\infty\}$.

If $\alpha \notin \tilde{c}(T)$, for arbitrary $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus c(A)$, $\lambda_0 < \alpha$, $\lambda_1 > \alpha$, the limits

$$\lim_{\lambda \uparrow \alpha} E([\lambda_0, \lambda]), \qquad \lim_{\lambda \downarrow \alpha} E([\lambda, \lambda_1]) \tag{1.1}$$

exist in the strong operator topology. Here we agree that, if $\alpha = \infty$, then $\lambda_1 > \alpha$ ($\lambda \downarrow \alpha$) means $\lambda_1 > -\infty$ ($\lambda \downarrow \alpha$, respectively). If $\alpha \in \tilde{c}(T)$ and the limits (1.1) do still exist, then α is called *regular critical point* of T, otherwise α is called *singular.*

Consider now a regular Sturm-Liouville operators of type

$$A := (\operatorname{sgn} w(\mu))L = \frac{1}{w(\mu)}(-d^2/d\mu^2 + q(\mu)), \qquad \mu \in \mathcal{I} = [a,b], \ -\infty < a < b < +\infty, \tag{1.2}$$

where the operator L is defined by (0.4) and the boundary conditions

$$y(a)\cos\omega_1 + y'(a)\sin\omega_1 = 0, \quad y(b)\cos\omega_2 + y'(b)\sin\omega_2 = 0.$$

We assume that L is a self-adjoint operator in $L^2(\mathcal{I}, |w(\mu)|d\mu)$ and that the sets $\mathcal{I}_+ := \{\mu \in \mathcal{I} : w(\mu) > 0\}$ and $\mathcal{I}_- := \{\mu \in \mathcal{I} : w(\mu) < 0\}$ are both of positive Lebesgue measure. The elements of the set $\overline{\mathcal{I}_+} \cap \overline{\mathcal{I}_-}$ are called *turning points of w*.

Definition 2 ([3])**.** A nonnegative (nonpositive) function w is said to be *simple from the right at μ_0* if there exist $\delta > 0$ such that

$$w(\mu) = (\mu - \mu_0)^\tau \rho(\mu) \qquad (w(\mu) = -(\mu - \mu_0)^\tau \rho(\mu), \text{ respectively})$$

holds on $[\mu_0, \mu_0 + \delta]$ with some $\tau > -1$, $\rho \in C^1[\mu_0, \mu_0 + \delta]$, $\rho(\mu_0) > 0$, and $\rho'(\mu_0 + 0) = 0$. A function w is said to be *simple from the left at* μ_0 if the function $\mu \mapsto w(-(\mu - \mu_0) + \mu_0)$ is simple from the right at μ_0. A function w is said to be *simple at* μ_0 if it is simple from the right and simple from the left at μ (with, possibly, different numbers τ).

Theorem 2 ([3]). *Assume that the function w has a finite number of turning points and w is simple at all turning points. Suppose that the function q is bounded. Then A is definitizable operator and ∞ is regular critical point of A.*

2. Equations with J-nonnegative operators; the continuous spectrum case

In this section we consider problem (0.5)-(0.7) with nonnegative self-adjoint operator L, $L = L^* \geq 0$. We eliminate the assumption that the spectrum of L is discrete.

Put $A := JL$. Then A is a J-self-adjoint and J-nonnegative operator in the Krein space $K := (H, [\cdot,\cdot])$, where $[\cdot,\cdot] := (J\cdot,\cdot)$. Suppose $\rho(A) \neq \emptyset$. Then A is a definitizable operator. It is evident that only 0 and ∞ can be critical points of A. For the sake of simplicity we suppose in this section that $\ker L = 0$ (clearly, $\ker A = \ker L$).

Assume that

$$\text{neither} \quad 0 \quad \text{nor} \quad \infty \quad \text{are singular critical points of} \quad A. \tag{2.1}$$

This condition imply that the J-orthogonal projections $P_\pm^A := E(\mathbb{R}_\pm)$ are bounded operators in H; here $E(\cdot)$ is the spectral function of A (see Preliminaries). Let $H_\pm^A := \operatorname{ran} P_\pm^A$. Since $\ker A = 0$, Theorem 1 implies that $H = H_+^A \dot{+} H_-^A$.

The following fact is well known.

Proposition 1. If A is a J-nonnegative definitizable operator and $\ker A = 0$, then condition (2.1) is fulfilled if and only if A is similar to a selfadjoint operator in H.

The following proposition follows from results of Ginzburg [1, Section I.4] and Theorem 1.

Proposition 2 ([4]). Suppose condition (2.1) is fulfilled and $\ker A = 0$. Then the restriction $T_\pm := P_\pm \upharpoonright H_\pm^A : H_\pm^A \to H_\pm$ is bounded and boundedly invertible bijection of $H_\pm^A$ onto $H_\pm$.

Combining Proposition 2 with the approach of [7, 2, 8], we obtain the following result.

Theorem 3 ([9]). *Assume that condition* (2.1) *is fulfilled and* $\ker A = 0$. *Then for each $\phi_+ \in H_+$, there is a unique solution ψ of* (0.5)-(0.7). *This solution may be written in the following form*

$$\psi(x) = \int_{+0}^{+\infty} e^{-sx}\, dE_s T_+^{-1} \phi_+,$$

where the integral converges in the norm topology of H.

It is proved for wide classes of ordinary and partial differential operators that ∞ is a regular critical point (see [3, 18, 16] and references). If additionally $L > \delta > 0$, then 0 is not a critical point and Theorem 3 yields that there exist a unique solution of (0.5)-(0.7).

In the case when $0 \in \sigma(L)$ the critical point at 0 may appear. If the spectrum of A accumulates at 0 from both sides, then 0 *is* a critical point of A. Regularity of critical point 0 has been studied only for several model classes of differential operators (see [5, 10, 11] and references). Two applications of these results to problem (0.1)-(0.4) are given below.

Example 1. Let $w(\mu) = \operatorname{sgn} \mu$, let $L_{col} : y \mapsto -y'' + qy$ be a self-adjoint Sturm-Liouville operator in the Hilbert space $H = L^2(\mathbb{R})$. Then $L = L_{col}$, $(Jf)(\mu) = (\operatorname{sgn} \mu) f(\mu)$. Let q be a finite-gap potential and $A := JL = (\operatorname{sgn} \mu)(-d^2/d\mu^2 + q)$. Then $\ker A = 0$ and the operator A is similar to a self-adjoint operator [10] (see also [9]). Hence, Proposition 1 and Theorem 3 yield the following result: *for each $\phi_+ \in L^2(\mathbb{R}_+)$, there is a unique solution of the problem*

$$(\operatorname{sgn} \mu) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \mu) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2}(x, \mu) - q(\mu) \psi(x, \mu) \qquad (0 < x < \infty,\ \mu \in \mathbb{R}) \tag{2.2}$$

$$\psi(0,\mu) = \phi_+(\mu) \quad \text{if} \quad \mu > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\psi(x,\mu)|^2 d\mu = O(1) \qquad \text{as} \quad x \to \infty.$$

This theorem is a generalization of results from [19].

Example 2. Let $w(\mu) = (\operatorname{sgn}\mu)|\mu|^\alpha$, $\alpha > -1$, let $H = L^2(\mathbb{R}, |\mu|^\alpha d\mu)$. Consider following [5, 11] the operator

$$(Ly)(\mu) = |\mu|^{-\alpha} y''(\mu) \ , \quad \operatorname{dom}(L) = \{y \in H \ : \ y, y' \in AC_{loc}(\mathbb{R}), \, Ly \in H\} \ . \tag{2.3}$$

The operator $A = (\operatorname{sgn}\mu)L = \dfrac{1}{w}\dfrac{d^2}{d\mu^2}$ is J-nonnegative definitizable operator in the Krein space $L^2(\mathbb{R}, w(\mu)d\mu)$; here $(Jf)(x) := (\operatorname{sgn} x)f(x)$. It has been proved in [5, 11] that $\sigma(A) = \mathbb{R}$, $\ker A = 0$, and the operator A is similar to a self-adjoint one. Thus, 0 and ∞ are regular critical points of A. By Theorem 3, we obtain the following result: *for each $\phi_+ \in L^2(\mathbb{R}_+, \mu^\alpha d\mu)$, there is a unique solution of problem* (0.1)-(0.3) *with $w(\mu) = (\operatorname{sgn}\mu)|\mu|^\alpha$ and L defined by* (2.3). This theorem is a generalization of some results obtained in [15] by another method.

3. Equations with operators L such that $\sigma(L) \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset$

The aim of this section is to drop the assumption $L \geq 0$. We suppose that

$$L \text{ is bounded below, } L \geq \gamma, \ \gamma \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$\text{the operator} \quad A := JL \quad \text{is a definitizable operator,} \tag{3.2}$$

$$\text{and } \infty \text{ is not a singular critical point of } \ A. \tag{3.3}$$

Assumption (3.2) holds true whenever the form $(L\cdot, \cdot)$ has finite number of negative squares and $\rho(A) \neq \emptyset$ (see [12]).

Let us introduce the following boundary condition at ∞

$$(E^\alpha): \qquad \|\psi(x)\|_H = O(e^{\alpha x}) \qquad (x \to +\infty).$$

In the sequel, this condition is called the (E^α) condition. Our main result is the following theorem.

Theorem 4. *Let $L \geq \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, and let assumptions* (3.1),(3.2), *and* (3.3) *be true. Then:*

1: *There exist $\alpha \in \mathbb{R}$ such that problem* (0.5)-(0.6)-(E^α) *has solutions for each $\phi_+ \in H_+$.*

2: *There exist $\beta \in \mathbb{R}$ such that problem* (0.5)-(0.6)-(E^β) *has at most one solution for each $\phi_+ \in H_+$.*

3: *Statement (1) holds true for all $\alpha > -\min c(A)$, Statements (2) holds true for all $\beta < -\max c(A)$, where $c(A)$ is the set of finite critical points of A (see Preliminaries).*

Combining Theorem 4 with Theorem 2, we obtain the following statement.

Corollary 1. *Let A be a regular Sturm-Liouville operator of the form* (1.2). *Suppose that the function w has a finite number of turning points, w is simple at all turning points, and the potential q is bounded. Then Statements (1), (2), and (3) of Theorem 4 hold.*

The author express his gratitude to V.A. Derkach, who drew author's attention to the papers [8, 2]*; to M.M.Malamud and V.A.Marchenko for stimulating discussions about this circle of problems.*

References

[1] *Azizov, T.Ya., Iokhvidov, I.S.* Linear operators in spaces with an indefinite metric. Chichester, New York, John Wiley and Sons 1989.

[2] *Beals, B., Protopopescu, V.* Half-Range completeness for the Fokker-Plank equation. J. Stat. Phys. **32** (1983) 565–584.

[3] *Ćurgus, B., Langer, H.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function. J. Differential Equations **79** (1989) 31–61.

[4] *Ćurgus, B., Najman, B.* Positive differential operators in Krein space $L^2(\mathbb{R})$. Recent development in operator theory and its applications (Winnipeg, MB, 1994), Oper. Theory Adv. Appl. Vol.87, Basel, Birkhäuser 1996, 95–104.

[5] *Fleige, A., Najman, B.* Nonsingularity of critical points of some differential and difference operators. Oper. Theory Adv. Appl. Vol.106, Basel, Birkhäuser 1998, 147–155.

[6] *Greenberg, W., van der Mee, C.V.M., Protopopescu, V.* Boundary value problems in abstract kinetic theory. Operator theory, Vol.23, Basel, Birkhäuser, 1987.

[7] *Hangelbroek, R.J.* Linear analysis and solution of neutron transport problem. Transport. Theory Statist. Phys. **5** (1976) 1–85.

[8] *Kaper, H.G., Lekkerkerker, C.G., Kwong, M.K., Zettl A.* Full- and partial- range expansions for Sturm-Liouville problems with indefinite weights. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **98** (1984) 69-88.

[9] *Karabash, I.M.* On similarity of differential operators to selfadjoint ones. Candidate thesis, The Institute of Applied Mathemtics and Mechanics NASU, Donetsk 2005 (Russian).

[10] *Karabash, I.M., Malamud, M.M.* The similarity of a J-self-adjoint Sturm-Liouville operator with finite-gap potential to a self-adjoint operator. Doklady Mathematics **69** (2004), no.2, 195–199.

[11] *Kostenko, A.S.* Similarity of indefinite Sturm-Liouville operators with singular potential to a self-adjoint operator. Math. Notes **78**, (2005), no.1, 134-139.

[12] *Langer, H.* Spectral functions of definitizable operators in Krein space. Lecture Notes in Mathematics **948** (1982) 1–46.

[13] *van der Mee, C.V.M.* Semigroup and Factorization methods in transport theory. Math. Centre Tract. No.146, Amsterdam 1981.

[14] *van der Mee, C.V.M., Ran, A.C.M., Rodman, L.* Stability of stationary transport equation with accretive collision operators. J. Funct. Anal. **174** (2000), 478–512.

[15] *Pagani, C.D.* On the parabolic equation and a related one. Ann. mat. pura ed appl. **99** (1974), no.4, 333–399.

[16] *Parfönov, A.I.* On an embedding criterion for interpolation spaces and its applications to indefinite spectral problems. Sib. Mat. Zurnal **44** (2003), no.4, 810-819.

[17] *Pyatkov, S.G., Abasheeva, N.L.* Solvability of boundary value problems for operator-differential equations: the degenerate case. Sib. Math. J. **43** (2002), no.3, 678–693.

[18] *Pyatkov, S.G.* Operator Theory. Nonclassical Problems. Utrecht , Boston , Koln , Tokyo , VSP 2002.

[19] *Tersenov, S.A.* Parabolic equations changing theirs time direction. Novosibirsk, Nauka 1985.

MICROMAGNETIC EQUATIONS FOR NANOMAGNETS

V. V. Ternovsky, M. M. Khapaev
Lomonosov Moscow State University

This paper presents generalized micromagnetic equations which take into account the effect of magnetization vector variation. The minimization of free energy obeys integral constraint with supplementary gradient of magnetization vector. 3D simulation results of remanent state based on the proposed equations is provided for a cubic particle and compared with the results obtained from conventional micromagnetic theory. In a similar way the proposed corrections that maintain integral constraint are introduced into the dynamic equation describing spin precession. Comparison of the modified dynamic equation with the solution of conventional Landau–Lifshitz dynamic equation shows that the introduction of an additional gradient term is sufficient to reduce high frequency stiff response.

PACS numbers: 75.10.-b, 75.60.Ch, 75.75.+a

The magnetic field induced by an ensemble of magnetic spins. The magnitude of the magnetization depends on the number of spins, the extent of alignment and the magnetic moments. The basic assumption of the theory of micromagnetics [1]– [3] is a postulation of magnetization vector conservation, $|\mathbf{M}| = M_S$, everywhere within the particle, where M_S is considered to be a function of temperature but not of space [4]. The equilibrium configuration of magnetic moments is defined by minimization of free energy functional $G(\mathbf{M})$, which includes exchange, self–magnetostatic and anisotropy energies, as well as the energy of interaction with the external magnetic field. Minimization of this functional is performed under the constraint $|\mathbf{M}| = M_S$. As a convex functional $G(\mathbf{M})$ is minimized with a non convex restriction, there is a spectrum of solutions of a micromagnetic problem appropriate to metastable states. The dynamic processes in ferromagnetics are studied within the framework of Landau–Lifshitz–Gilbert (LLG) equation [5, 6], having integral of motion $|\mathbf{M}| = const$. Thus, magnetization is reduced to the precession and dissipation of a magnetization vector $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ in an effective field $\mathbf{H}$.

It is clear that with a smaller and smaller size of structure we should approach the quantum mechanical behavior of an ensemble of interacting spins, where classical description of micromagnetic theory loses its applicability. One should remember that magnetization within the micromagnetic theory is determined by averaging within a sufficiently small volume to have a continuous description. However this volume should be sufficiently large so that magnetization goes smoothly. With small sizes of magnetic structures the classical theory of magnetism encounters the following difficulties:

(1) Some solutions contain singularities, the so called “Bloch’s points” [7], which yield uncertainty in magnetization at the centre of such structures.
(2) LLG equation in some cases demonstrates high–frequency oscillations or even chaos [8], which brakes smooth rotation.
(3) Modeling a magnetic reversal encounters a difficulty caused by a topological interdiction for a continuous turn of magnetization [9], causing the appearance of exotic structures such as “magnetic drops”.
(4) Coarse graining in micromagnetics LLG equation overestimates Curie temperatures by an order of magnitude [10].

The listed problems and contradictions are related to the infringement of the initial assumption about the smoothness of solutions within the micromagnetism theory. In dynamics, probably, there will be no such volume of spontaneous magnetization, in which this magnetization can be considered homogeneous, even for single–domain particles. It was clear that the challenge of theory of micromagnetism is related to condition $|\mathbf{M}| = M_S$. There were few attempts to modify the theory of micromagnetism by replacing this condition by another one, or by introducing additional terms within LLG equation. However complete refusal of restriction on the length of $\mathbf{M}$ vector, suggested in [11], is impossible, since the minimum of convex functional $G(\mathbf{M})$ will be achieved at unique distribution of a vector $\mathbf{M}$, that contradicts experimental data about plurality of such minima. For other critical comments, related to paper [11] see [12].

Within the papers [12, 13] an additional part for local fluctuation of free energy was introduced by the relations $\frac{1}{2\chi_0}\int\limits_V (\mathbf{M}-\mathbf{M}_0)^2\, d\mathbf{r}$ or $\frac{1}{2\chi_0}\int\limits_V (|\mathbf{M}|-|\mathbf{M}_0|)^2\, d\mathbf{r}$, where $\mathbf{M}_0$ is equilibrium magnetization and χ_0 is the high–field susceptibility at temperature T. Dissatisfaction with condition $|\mathbf{M}| = M_S$ was also discussed in some other papers, see [14]. Finally, the experiments [15] show that the value of $\mathbf{M}$ vector is not conserved for sufficiently small structures.

Here we do not discuss modification of the dissipation term in Gilbert [6] presentation. It depends on a particular dissipation mechanism and as it was written in [16] “a myriad of conceivable forms of damped gyromagnetic precession equations can be imagined”. A modified LLG equation which takes into account the *internal friction*, caused by magnetic inclusions and Barkhausen effect was suggested in [17].

Here we present micromagnetic equations for nanostructures which are applicable on the scales of the order of exchange length. In classical theory magnetization is understood as a magnetic moment of a unit of volume of media, which follows from summation of elementary moments of Ampere’s molecular volume currents (Bohr model)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m}_i, \tag{0.1}$$

where the number of atoms N is considered to be sufficiently big, so that the transition to a differentiable function $\mathbf{M}$ is carried out in a correct way. If all of the elementary vectors $\mathbf{m}_i$ ($\mathbf{m}_i^2 = \mathbf{m}^2 = const$) are collinear, then the magnetization reaches its maximal value $\mathbf{M} = \mathbf{m}_i$. Nevertheless if the condition of collinearity is not met, then $|\mathbf{M}| < |\mathbf{m}_i|$ and magnetization varies from point to point. From (0.1) follows

$$\mathbf{M}^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{m}_i\mathbf{m}_j \approx \frac{\mathbf{m}^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\cos\varphi_{ij}. \tag{0.2}$$

According to the bsic assumption of the theory of micromagnetics [1]– [3] one should consider conservation of value given by formula (0.2). However one can meet the similar sum when exchange field is introduced in the “classical” description from Heisenberg Hamiltonian [1]. Magnetic moments of neighboring electrons are almost parallel, thus the angle φ_{ij} is small and, hence, $\cos\varphi \cong 1 - \varphi A^2/2$. At the same time the angle φ_{ij} is related to the gradient of the magnetization vector. In the same fashion one can approximate formula (0.2). Thus, passing to a continuous description in Eq. (0.2), one can find a new generalized *integral* condition instead of the old *local* condition $|\mathbf{M}|^2 = const$:

$$\frac{1}{V}\int\limits_V \left(\mathbf{M}^2 + C\,|\nabla\mathbf{M}|^2\right) d\mathbf{r} = M_S^2, \tag{0.3}$$

where V is the volume of ferromagnetic, and constant M_S is the length of vector $\mathbf{M}$ with homogeneous magnetization at temperatures close to $T = 0$. Constant $C \cong l_{ex}^2\psi(T)$, where $l_{ex} = \sqrt{A/\,2\pi M_S^2}$ is the characteristic length of exchange interaction, A is a constant of exchange interaction, ψ — is a function of temperature. Constant C is related to the exchange interaction constant, it can be also determined experimentally, e.g. from analysis of relaxation process in ferromagnets [19]– [21]. The expected value of ψ at room temperature is around one.

The free energy functional can be written in standard form (here we use definitions of [1]):

$$G(\mathbf{M}) = E_m + E_{ex} + E_a, \tag{0.4}$$

where

$$E_m = -\int\limits_V \left[\mathbf{H}_{app} + \frac{1}{2}\mathbf{H}_{dem}(\mathbf{M})\right]\mathbf{M}d\mathbf{r},$$

,

$$E_{ex} = \frac{A}{2M_S^2}\int\limits_V \left[(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2\right] dr,$$

$$E_a = \int\limits_V \Phi(\mathbf{M}) d\mathbf{r}.$$

Here E_m presents the magnetostatic self–energy, $\mathbf{H}_{app}$ is the external magnetic field, $\mathbf{H}_{dem}$ is the demagnetizing field, E_{ex} is the energy of exchange interaction, energy E_a is related to anisotropy, and Φ is a function which depends on the crystal structure of ferromagnetic. We neglected in (0.4) the effect of magnetostriction [1], and also the corrections caused by thermal fluctuations. The latest is fair at temperatures $T \ll T_c$ (where T_c is Curie temperature). Attention has to be paid to the fact that within the term of exchange energy we considered an absence of restriction of the length of $\mathbf{M}$ vector [12]. The gradient of the vector function in (0.3) is understood in the same manner as within E_{ex}. Thus, the corrections to $\mathbf{M}$ vector in (0.3) are of the same nature as the corrections to free energy, caused by exchange interaction.

By a standard way one can find corresponding Euler equation with the help of variation of functional (0.4) under restriction (0.3)

$$-\frac{A}{M_S^2} \int\limits_V \Delta\mathbf{M} + \Phi'(\mathbf{M}) - \mathbf{H}_{dem} - \mathbf{H}_{app} = \lambda(\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}), \tag{0.5}$$

where the Lagrange multiplier λ does not depend on spatial value. Here gradient $\Phi'(\mathbf{M})$ presents an effective anisotropy field.

It is convenient to write this equation in the following form

$$\mathbf{H} \times [\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}] = 0, \tag{0.6}$$

where the effective magnetic field $\mathbf{H}$ is presented by

$$\mathbf{H} = -\,\partial G/\,\partial\mathbf{M} = \frac{A}{M_S^2}\Delta\mathbf{M} - \Phi'(\mathbf{M}) + \mathbf{H}_{dem} + \mathbf{H}_{app}. \tag{0.7}$$

The demagnetization field $\mathbf{H}_{dem}$ is defined by magnetostatic Maxwell equations:

$$div\,(\mathbf{H}_{dem} + 4\pi\mathbf{M}) = 0, \qquad \mathbf{curl}\,\mathbf{H}_{dem} = 0, \tag{0.8}$$

where $\mathbf{H}_{dem} = -\nabla U$, U is the field potential inside the ferromagnetic. Outside the ferromagnetic the field is described by the field potential U_1, which fulfills the Laplace equation

$$\Delta U_1 = 0. \tag{0.9}$$

The coupling conditions on the surface S of magnetic particle are given by

$$U = U_1, \qquad -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{n}} + 4\pi\mathbf{M}\mathbf{n} = -\frac{\partial U_1}{\partial\mathbf{n}}. \tag{0.10}$$

.

Here $\mathbf{n}$ presents the normal unit vector to surface S. Potential U_1 should obey, additionally, the requirement of regularity at infinity.

From (0.5) follows, that the constant of exchange interaction determined experimentally is given by $A - \lambda C M_S^2$, where A — the constant of exchange interaction for "bulky" sample, where the effects of changing $\mathbf{M}$ magnitude can be neglected. The multiplier λ for nanoparticles can be efficiently approximated by the average energy (0.4) for single–domain state and calculated analytically. Thus, constant C is uniquely determined.

The restriction (0.3) prohibits the singular solutions of the "Bloch point" type $\mathbf{M} = M_S\mathbf{r}/\,|\mathbf{r}|$, although this solution presents formally the stationary point of $G(\mathbf{M})$ functional with local constraint.

It can also be proved, that minimization of the functional $G(\mathbf{M})$ with integral restriction (0.3) is a well–posed problem for some $C < C^*$, where C^* is defined from transcendental algebraic equation (we omitted the corresponding mathematics, which generalized the proof [21] for minimization of $G(\mathbf{M})$ with condition $|\mathbf{M}|^2 = const$).

Having restriction (0.3) and stationary solution (0.6) in mind, one can introduce the modified Landau–Lifshitz equation applicable for nanoparticles. This modified equation can be written as a sum of precession and dissipative terms

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_0(\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}) \times \mathbf{H} - \lambda(\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}) \times [(\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}) \times \mathbf{H}], \tag{0.11}$$

where $\gamma_0' = \frac{\gamma_0}{1+\alpha^2}$, $\lambda = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\frac{\gamma_0}{|\mathbf{M}-C\Delta\mathbf{M}|}$, γ_0 is the gyromagnetic ratio, $\alpha > 0$ — is dissipation constant. Conservation condition (0.3) follows from this equation, which can be seen by multiplying (0.11) by $\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}$ and integrating it over volume V (condition $\partial\mathbf{M}/\partial\mathbf{n} = 0$ should be taken into account on the surface S). One can see an important difference: classical LLG equation conserves a local value $|\mathbf{M}|^2 = const$ [1], while modified equation (0.11) conserves an integral condition (0.3).

Equation (0.11) can be rewritten in equivalent Gilbert̀s form

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_0(\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}) \times \mathbf{H} + \frac{\alpha}{|\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}|}(\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}) \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \tag{0.12}$$

.

From this equation it follows that in the absence of an external magnetic field the free energy dissipates:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\int\limits_V \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} d\mathbf{r} = -\int\limits_V \frac{\alpha}{\gamma_0|\mathbf{M} - C\Delta\mathbf{M}|}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right)^2 d\mathbf{r}. \tag{0.13}$$

We have performed a number of calculations with the modified LLG equation (0.11). Below we present the results for nanoparticle of the cubic form. This case of a cubic particle was previously analyzed precisely within the frame of classical theory of micromagnetism [2, 3, 23, 24]. The magnetostatic potential for parallelepiped can be presented in the following form [23]

$$\begin{gathered} U(x,y,z) = \frac{2}{\pi}\left[U^{(x)} + U^{(y)} + U^{(z)}\right], U^{(x)} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty d\mu_1 d\mu_2 \int\limits_0^{l_y}\int\limits_0^{l_z} dy'dz'KF, \\ K = \cos\left[\mu_1\left(y - y'\right)\right]\cos\left[\mu_2\left(z - z'\right)\right], \\ F = \int\limits_0^x M_x\left(\xi, y', z'\right)e^{\mu(\xi - x)}d\xi - \int\limits_x^{l_x} M_x\left(\xi, y', z'\right)e^{-\mu(\xi - x)}d\xi, \end{gathered} \tag{0.14}$$

where $\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$, and potentials $U^{(y)}$ and $U^{(z)}$ are presented by cyclic rearrangement of x, y, z indexes. A similar presentation was used in [24] for 2D case. The advantage of this integral presentation is related to the ability to use fast Fourier transformation (FFT) for calculations. The establishment of a stationary magnetization was investigated by solution of LLG equation. To solve LLG equations we have used an explicit method, suggested in [25]. The parameters of material were chosen according to [26] (i.e. we consider a uniaxial anisotropy with an easy axis along z and dimensionless anisotropy constant $\Theta = 0.1$). The grid of dimension $64 \times 64 \times 64$ was used in calculations. It is known that depending on the parameters of material and initial conditions a classical problem has a set of stationary solutions of the “flower state”, “twisted flower state”, “vortex state” and other types [26, 27].

When the size of cube, l, is sufficiently big compared to exchange length l_{ex} (e.g. $l \geq 10l_{ex}$ the solution of LLG problem and modified equation are quite close to each other, hence the classical LLG equation is sufficient to describe the magnetization process quite well. With smaller size, $l < 10l_{ex}$, we can see deviations. We recognized the transition to this state from random initial conditions. Modifying initial conditions we were able to see other states as well.

In dynamics we have found that the modified equation permits a smooth transition, carried out faster then from classical LLG equation. At the same time parasite oscillations are suppressed by equation (0.11). Transition to the tortile starts from the surface by reduction of the length of the central vector. After that the system loses stability and smoothly passes to the state with lower energy.

[1] Brown [22] suggested replace the strict constraint $\mathbf{M}^2 = M_S^2$ by a weaker integral conservation condition in the form $\frac{1}{V}\int\limits_V \mathbf{M}^2 dr = M_S^2$ but it does not affect the LLG equation.

References

[1] W. F. Brown, Jr., *Micromagnetics* (Wiley, New York, 1963)
[2] A. Hubert, R. Schäfer, *Magnetic Domains* (Springer, Berlin, Heidelberg 1998)
[3] A. Aharoni, *Introduction to the Theory of Ferromagnetism* , 2^{nd} Ed. (Oxford University Press, New York 2000)
[4] A. Aharoni, *J. Appl. Phys.* **53**, 7861 (1982)
[5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Phys. Z. Sowjetunion* **8**, 153 (1935).
[6] T. L. Gilbert, *Phys.Rev.* **100**, 1243 (1955)
[7] A. Thiaville, J. M. García, R. Dittrich, J. Miltat, T. Schrefl, *Phys. Rev.* B **67**, 094410 (2003)
[8] L. Fernández Álvarez, O. Pla, O. Chubykalo, *Phys. Rev.* B **61**, 11613 (2000)
[9] R. Hertel, J. Kirschner, *Physica* B **343**, 206 (2004)
[10] G. Grinstein, R. H. Koch, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 207201 (2003)
[11] N. Minnaja, *Phys. Rev.* B **1**, 1151(1970)
[12] A. Aharoni, *Phys. Rev.* B **40**, 4607 (1989)
[13] W. Baltensperger, J. S. Helman, *Phys. Rev.* B **38**, 8954 (1988)
[14] V. L. Safonov, H. N. Bertram, *J. Appl. Phys.* **93**, 6912 (2003)
[15] J. P. Nibarger, R. Lopusnik, Z. Celinski, T. J. Silva, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 93 (2003)
[16] J. C. Mallinson, *IEEE Trans. Magn.* **23**, 1060 (1987)
[17] A. Visintin, *Physica B* **233**, 365 (1997)
[18] V. G. Baryakhtar, B. A. Ivanov, A. L. Sukstanskii, E. Yu. Melikhov, *Phys. Rev.* B **56**, 619 (1997)
[19] R. H. Koch, J. A. Katine, J. Z. Sun, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 088302 (2004)
[20] J. Ho, F. C. Khanna, B. C. Choi, *Phys. Rev. Lett.* **92** , 097601 (2004)
[21] A. Visintin, *Japan J. Appl. Math.* **2** , 69 (1985)
[22] W. F. Brown, Jr., *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **147**, 463 (1969)
[23] V. Ternovsky, J. P. Wang, T. C. Chong, *Proc. of the* 8^{th} *Magnetism and Magnetic Materials, Intermag Conference*, San Antonio, 2001, p. 340
[24] A. Aharoni, *IEEE Trans. On Mag.* **27**, 3539 (1991)
[25] V. Ternovsky, B. Luk'yanchuk, J. P. Wang, *JETP Letters* **73**, 661 (2001)
[26] A. Hubert, *μMAG Standard Problem #3*, http://www.ctcms.nist.gov/ rdm/spec3.html
[27] W. Rave, K. Fabian, A. Hubert, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* **190**, 332 (1998)

ON A SOLVABILITY OF SINGULAR CAUCHY PROBLEMS FOR FUNCTIONAL–DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A (NON)SUMMABLE SINGULARITY AND (NON–)VOLTERRA OPERATOR

Konyukhova N.B.
Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Vavilov str., 40, 119991 Moscow, Russia

1. Introduction

We represent an approach to the statement and analysis of singular problems for a system of n nonlinear functional–differential equations (FDEs) with a (non–)Volterra operator and (non)summable singularity at infinity. We pose a singular Cauchy problem (CP) with the given limit initial data at infinity or a problem without initial data (e.g., with a requirement of a solution boundedness). The sufficient conditions for univalent solvability of the problem are formulated as well as for the existence of k-parameter set of solutions ($1 \leq k \leq n$). In particular the results are needed for correct statement of singular boundary value problems (BVPs) for FDEs: the dimension of the set of solutions, satisfying given conditions at infinity, should be coordinated with the number of conditions posed in the other points of the considered interval. As particular cases, we refer to (generalized) ordinary differential equations (ODEs) including differential–delay equations, integro–differential equations (IDEs), etc.

The present work continues the investigation developed in [1] – [4], generalizing part of the results presented in those papers and introducing some new ones.

1.1. **Notation:** a_0, T_0 are fixed real numbers, $a_0 > 0$; $I_T = [T, \infty)$, $T \geq T_0$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $|\cdot|$ is a norm in $\mathbb{K}^n$ or associated matrix norm in the linear space $\mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$ of $n \times n$–matrices; $\Omega_n(a) = \{x : x \in \mathbb{K}^n,\ |x| \leq a\}$, $a > 0$; $C_n(I_T)$ is the Banach space of bounded continuous functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$, with the norm $|\xi|_C = |\xi|_{C_n(I_T)} = \sup\limits_{t \in I_T} |\xi(t)|$; $S_n(\eta(t), \omega) = \{\xi(t) : \xi \in C_n(I_T),\ |\xi - \eta|_C \leq \omega\}$, $\omega > 0$, is a closed ball in $C_n(I_T)$ by the radius ω with the center in $\eta(t)$, $\eta \in C_n(I_T)$; $S_n(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} S_n(0, \omega)$; $L_n^\infty(I_T)$ is the Banach space of essentially bounded Lebesgue–measurable functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$, with the norm

$$|\xi|_\infty = |\xi|_{L_n^\infty(I_T)} = \inf_{\mu(N)=0} \sup_{I_T \setminus N} |\xi(t)| = \mathrm{vraisup}_{t \in I_T} |\xi(t)|,$$

where μ is the Lebesgue measure; $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$ is the class of locally absolutely continuous functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$; $L_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$ is the class of locally summable functions $\xi(t)$, $\xi : I_T \to \mathbb{K}^n$.

In general, in what follows the integration is in the Lebesgue sense.

1.2. **Subsets of x-Lipschitz functions.** Let $G_n \in \{\Omega_n(a_0), \mathbb{K}^n\}$ and let $\mathrm{Lip}_n = \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times G_n)$ be the class of functions $f(t,x)$, $f : I_{T_0} \times G_n \to \mathbb{K}^n$, such that $f(\cdot, x)$ is continuous $\forall x \in G_n$ and, on any set $\Omega_n(a) \subseteq G_n$ $(a > 0)$, $f(t, \cdot)$ satisfies the Lipschitz condition uniformly with respect to $t \in I_{T_0}$ with a constant $L_f = L_f(a) > 0$. We decompose these functions on four subsets:

$$\mathrm{Lip}_n = \mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon) \cup \mathrm{Lip}_{n,a_0} \cup \mathrm{Lip}_n(a) \cup \widetilde{\mathrm{Lip}}_n.$$

Here the following classes are distinguished:
1) $\mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon) = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times G_n)$ and $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon,\ T_\varepsilon$ $(\delta_\varepsilon > 0,\ \Omega_n(\delta_\varepsilon) \subseteq G_n,\ T_\varepsilon \geq T_0)$ such that in the region $I_{T_\varepsilon} \times \Omega_n(\delta_\varepsilon)$ we can choose $L_f = L_f(\delta_\varepsilon) = \varepsilon\}$;
2) $\mathrm{Lip}_{n,a_0} = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \Omega_n(a_0))$ with $L_f = L_f(a_0) > 0\}$;
3) $\mathrm{Lip}_n(a) = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \mathbb{K}^n)$ and $\sup\limits_{a>0} L_f(a) = \infty$ for any choice of $L_f(a) > 0$ in $I_{T_0} \times \Omega_n(a)\}$;
4) $\widetilde{\mathrm{Lip}}_n = \{f(t,x) : f \in \mathrm{Lip}_n(I_{T_0} \times \mathbb{K}^n)$ and $\forall a > 0$ there exist $L_f(a) > 0$ in $I_{T_0} \times \Omega_n(a)$ such that $L_f = \sup\limits_{a>0} L_f(a) < \infty\}$.

Although the class $\mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$ is absorbed by other three classes, it is convenient to consider this class separately because, for FDEs with nonsummable singularity at infinity, it permits to formulate more general and practically needed results.

2. Statement of the problems and preliminary remarks

We consider a system of n nonlinear FDEs on a semi–infinite interval in the form:

$$x' = A(t)x + M(t)(FNx)(t) + g(t) \quad \text{a.e. on } I_T. \tag{2.1}$$

Here, in general, the left end of I_T ($T \geq T_0$) is mobile and defined in the theorems; $x : I_T \to \mathbb{K}^n$, $g : I_{T_0} \to \mathbb{K}^n$, $A, M : I_{T_0} \to \mathbb{L}(\mathbb{K}^n)$, the entries of $A(t)$, $M(t)$ and $g(t)$ are locally summable functions; N is a local Nemytskii operator (LNO), $N : C_n(I_{T_0}) \to C_n(I_{T_0})$,

$$(\mathbf{H1}) \qquad (Nx)(t) = (N_f x)(t) \equiv f(t, x(t)), \qquad f \in \mathrm{Lip}_n, \qquad f(t,0) \equiv 0; \tag{2.2}$$

$F : C_n(I_T) \to L_n^\infty(I_T)$, $(FNx)(t) = (F \circ f(\cdot, x(\cdot)))(t)$, where a mapping F, generally speaking, nonlinear, nonlocal and depending on a choice of T, satisfies conditions [1]:

$$(\mathbf{H2}) \qquad F(0) = 0, \qquad |F(\xi) - F(\tilde{\xi})|_\infty \leq |\xi - \tilde{\xi}|_C \qquad \forall \xi, \tilde{\xi} \in C_n(I_T). \tag{2.3}$$

Because I_T is a semi–infinite interval, we say that Eq.(2.1) is singular and F is a singular operator. For Eq.(2.1), the sufficient conditions for the existence of the bounded solutions, belonging to the class $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$, depend on a type of singular point at infinity and on the mapping F properties. First of all, extending a concept of Volterra operator [5] on singular FDEs under consideration, we introduce

Definition 1. Let $\widetilde{T}$ ($\widetilde{T} \geq T_0$) be fixed and let a mapping F, $F : C_n(I_{\widetilde{T}}) \to L_n^\infty(I_{\widetilde{T}})$, be given. We say that F is a singular Volterra operator (SVO) iff $\forall T \geq \widetilde{T}$ and $\forall \xi_1, \xi_2 \in C_n(I_{\widetilde{T}})$ from an equality $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ on I_T follows

$$(F\xi_1)(t) = (F\xi_2)(t) \quad \text{a.e. on } I_T;$$

otherwise F is a singular non–Volterra operator.

The simplest SVOs are the following: 1) F is an embedding $C_n(I_{T_0})$ into $L_n^\infty(I_{T_0})$, i.e., $F(\xi) \equiv \xi \ \ \forall \xi \in C_n(I_{T_0})$; 2) F is a generalized LNO, i.e., $(F\xi)(t) \equiv (N_\varphi \xi)(t) \equiv \varphi(t, \xi(t))$, $\xi \in C_n(I_{T_0})$, $\varphi : C_n(I_{T_0}) \to L_n^\infty(I_{T_0})$.

Remark 1. It is obvious that: 1) if F is an embedding $C_n(I_{T_0})$ into $L_n^\infty(I_{T_0})$ and entries of $A(t)$, $M(t)$ and $g(t)$ are (piecewise) continuous functions on I_{T_0}, then Eq.(2.1) is a system of ODEs; 2) if F is a generalized LNO, then Eq.(2.1) is a system of generalized ODEs; 3) Eq.(2.1) is a system of differential–delay equations when $(F\xi)(t) \equiv \xi(h(t))$, $h : I_{T_0} \to I_{T_0+\tau}$, $\tau \geq 0$; 4) if F is an integral operator, then Eq.(2.1) is a system of IDEs, etc.

For a concept of (non–)summable singularity at infinity to Eq.(2.1), let us introduce the values

$$I_A(T) = \int_T^\infty |A(t)| dt, \qquad I_M(T) = \int_T^\infty |M(t)| dt, \qquad I_g(T) = \Big| \int_T^\infty g(t) dt \Big|, \qquad T \geq T_0. \tag{2.4}$$

Definition 2. We say that Eq.(2.1) has **a summable singularity at infinity** iff the inequalities

$$(\mathbf{H3}) \qquad I_A(T_0) < \infty, \qquad I_M(T_0) < \infty, \qquad I_g(T_0) < \infty \tag{2.5}$$

are valid; otherwise there is **a nonsummable singularity at infinity**.

The inequalities (2.5) are analogous to the Caratheodory–type conditions for generalized ODEs (see, e.g., [6], Chapter II).

Remark 2. When in (2.4) the integration is in the Riemann sense, the improper integral from $g(t)$ may be convergent conditionally and nonconvergent absolutely (hence the corresponding Lebesgue integral doesn't converge). Then the relations (2.5) become similar to the conditions of [7] for ODEs.

Already for ODEs with a nonintegrable singularity, as it has been demonstrated on the example in [8], the Caratheodory–type conditions, i.e., the restrictions to a growth of given functions with respect to t, generally speaking, cannot provide an existence of a solution to singular CP with the limit initial data in such singular point.

For Eq.(2.1) with **a nonsummable singularity at infinity**, following [2]–[4] we select a general linear equation

$$x' = A(t)x \quad \text{a.e. on } I_{T_0}, \tag{2.6}$$

and subject its solutions to one from the following hypotheses:

(H4) All nontrivial solutions of Eq.(2.6) are unbounded as $t \to \infty$.

(H5) There is no solution of Eq.(2.6) tending to zero as $t \to \infty$ other than $x(t) \equiv 0$.

(H6) The hypothesis (H5) is valid and moreover the matrix $A(t)$ has (a.e. on I_{T_0}) a constant nontrivial k–dimensional kernel ($1 \leq k \leq n$), generating in $\mathbb{K}^n$ a k–dimensional subspace independent of t.

Then instead of (2.4) the following auxiliary magnitudes are defined:

$$J_M(t) = \int_t^\infty |U_A(t,s)M(s)|ds, \qquad J_g(t) = \Big|\int_t^\infty U_A(t,s)g(s)ds\Big|, \qquad t \geq T_0; \tag{2.7}$$

$$\widehat{J}_M(T) = \sup_{t \in I_T} J_M(t), \qquad \widehat{J}_g(T) = \sup_{t \in I_T} J_g(t), \qquad T \geq T_0. \tag{2.8}$$

Here we denote by $U_A(t,s)$ the Cauchy matrix, $U_A(t,s) = \Phi_A(t)\Phi_A^{-1}(s)$, where $\Phi_A(t)$ is a fundamental matrix for Eq.(2.6), and suppose that at least

$$(\mathbf{H7}) \qquad \widehat{J}_M(T_0) < \infty, \qquad \widehat{J}_g(T_0) < \infty. \tag{2.9}$$

For a statement and study of singular CPs with the limit initial data at infinity, the following additional conditions (one or both) will be necessary:

$$(\mathbf{H8}) \qquad \lim_{t\to\infty} J_g(t) = 0; \tag{2.10}$$

$$(\mathbf{H9}) \qquad \lim_{t\to\infty} J_M(t) = 0. \tag{2.11}$$

First of all we formulate three singular problems without initial data at infinity.

Problem 1. For Eq.(2.1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\rm loc}(I_T)$, lying in the ball

$$\sup_{t \in I_T} |x(t)| \leq \omega, \quad \omega > 0, \tag{2.12}$$

where ω is a certain finite, in general mobile and depending on T magnitude ($0 < \omega_{\min}(T) \leq \omega(T) \leq \omega_{\max}(T) < \infty$), determined in the theorems.

When $f : I_{T_0} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, it is naturally to consider the case $\omega \to \infty$.

Problem 2. For Eq.(2.1) when $f \in \widetilde{\rm Lip}_n \cup {\rm Lip}_n(a)$, find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\rm loc}(I_T)$, satisfying the boundedness condition:

$$\sup_{t \in I_T} |x(t)| < \infty. \tag{2.13}$$

Problem 3. For Eq.(2.1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\rm loc}(I_T)$, such that

$$\exists \lim_{t\to\infty} x(t) : \qquad |\lim_{t\to\infty} x(t)| < \infty. \tag{2.14}$$

The posed below Problems 4 and 5 are singular CPs with given limit initial data at infinity; in addition Problem 5 is regarded also as a limit singular problem with free parameters accompanying to Problem 3.

Problem 4. For Eq.(2.1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\rm loc}(I_T)$, satisfying condition

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{2.15}$$

Problem 5. Let $M^{(k)}$ be a given k–dimensional manifold embedded in $\mathbb{K}^n$: $M^{(k)} \subseteq G_n$, $0 \le k \le n$. Let c_∞ be a constant vector, belonging to this manifold. For Eq.(2.1), find a solution $x(t)$, $x \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_T)$, satisfying condition

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c_\infty. \qquad c_\infty \in M^{(k)}. \tag{2.16}$$

Thus either c_∞ is a fixed point in G_n ($k=0$), so that Problem 5 is a singular CP, or c_∞ is a vector with k arbitrary components ($1 \le k \le n$) and hence Problem 5 defines a k–parameter set of solutions to Problem 3.

Remark 3. In the previous papers [1]–[4] the practically important Problems 3 and 5 are not discussed.

In order to study the above problems, we would like to adapt the contraction mapping principle (see, e.g., [9], Chapter 8) to the corresponding operator equation

$$x(t) = (V(x))(t), \quad t \ge T, \tag{2.17}$$

where $V : C_n(I_T) \to C_n(I_T)$. It is obvious that a form of V depends on a problem statement and on the hypotheses to Eqs.(2.1),(2.6).

3. FDEs with a summable singularity at infinity

A class of FDEs (2.1) with **a summable singularity at infinity** is under consideration in detail for the first time. This sufficiently simple case is found to be less trivial at least when F is a non–Volterra operator. Moreover a comparison of this case with more difficult FDEs with a nonsummable singularity at infinity is also helpful.

For Eq.(2.1), when (H1)–(H3) are fulfilled, we consider Problem 5 (with $k=0$ or $k=n$) and replace this problem by equivalent functional–integral Eq.(2.17) with the operator

$$(V(x))(t) = c_\infty - \int_t^\infty [A(s)x(s) + M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \ge T. \tag{3.1}$$

We fix ω ($\omega > 0$, $\Omega_n(\omega) \subseteq G_n$) and $T = \widetilde{T}$ ($\widetilde{T} \ge T_0$) such that the inequalities

$$I_A(\widetilde{T}) \le q/4, \qquad I_M(\widetilde{T}) \le q/(4L_f), \qquad I_g(\widetilde{T}) \le \omega(1-q)/2 \tag{3.2}$$

are valid, where $0 < q < 1$ and $L_f = L_f(\omega) > 0$. For SVO F, due to (H3), we can choose beforehand the value of $\widetilde{T}$ to ensure a realization of inequalities (3.2). For singular non–Volterra operator F, these inequalities are also assumed to be fulfilled (e.g., by means of a choice of entering FDEs parameters or due to a posteriori determination of F on the interval $I_{\widetilde{T}}$, etc.).

Further, for fixed c_∞ satisfying restriction

$$|c_\infty| \le \omega/2, \tag{3.3}$$

we consider the operator (3.1) on the closed ball $S_n(c_\infty, \omega/2)$ in the Banach space $C_n(I_T)$.

Then for each mapping F satisfying (H2) and $\forall x, \tilde{x} \in S_n(c_\infty, \omega/2)$, we get:

$$\begin{aligned} |V(x) - c_\infty|_C \le I_A(\widetilde{T})\Big(|x - c_\infty|_C + |c_\infty|\Big) + I_M(\widetilde{T})\Big(|FNx - FNc_\infty|_\infty + |FNc_\infty|_\infty\Big) + \\ + I_g(\widetilde{T}) \le I_A(\widetilde{T})\Big(|x - c_\infty|_C + |c_\infty|\Big) + I_M(\widetilde{T})\Big(|Nx - Nc_\infty|_C + |Nc_\infty|_C\Big) + I_g(\widetilde{T}) \le \\ \le \Big[I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big]|x - c_\infty|_C + \Big[I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big]|c_\infty| + I_g(\widetilde{T}) \le \\ \le (q/2)\omega/2 + (q/2)\omega/2 + (1-q)\omega/2 = \omega/2; \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$|V(x) - V(\tilde{x})|_C \le \Big[I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big]|x - \tilde{x}|_C \le (q/2)|x - \tilde{x}|_C. \tag{3.5}$$

Then operator V maps the ball $S_n(c_\infty, \omega/2)$ into itself and V is a contraction. As the result, the contraction mapping theorem gives

Theorem 1. *Let the hypotheses* (H1) *and* (H3) *be fulfilled and let for a chosen* q, $0 < q < 1$, *the values* ω, c_∞ *and* $T = \widetilde{T}$ *be defined as above. Then for any given mapping* F *satisfying* (H2) *there exists a unique fixed point* $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in S_n(c_\infty, \omega/2)$, *of the mapping* V *defined by* (3.1)*; it can be specified as the limit*

$$\widehat{x} = \lim_{k\to\infty} V^k(x_0) \tag{3.6}$$

for any starting x_0, $|x_0 - c_\infty|_C \le \omega/2$, and, for the rate of convergence, we have the estimate

$$|V^k(x_0) - \widehat{x}|_C \le [(q/2)^k/(1-q/2)]|V(x_0) - x_0|_C. \tag{3.7}$$

A global convergence of successive approximations to $\widehat{x}$ (i.e., $\forall x_0 \in C_n(I_{\widetilde{T}})$) occurs when: 1) $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ and $L_f > 0$ is independent of ω constant; 2) $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ and F is SVO but in this case a choice of $\widetilde{T}$ a posteriori depends on a choice of x_0 determining in turn a choice of ω, $\omega \ge 2\max[|x_0 - c_\infty|_C,\, I_g(\widetilde{T})/(1-q)]$, and $L_f = L_f(\omega)$ to satisfy (3.2).

The function $\widehat{x}(t)$ defined by Theorem 1, is a solution to Problem 1 because

$$|\widehat{x}|_C \le |\widehat{x} - c_\infty|_C + |c_\infty| \le \omega. \tag{3.8}$$

Moreover Eqs.(2.17),(3.1) imply the estimates:

$$|\widehat{x} - c_\infty|_C \le \Big[\Big(I_A(\widetilde{T}) + L_f I_M(\widetilde{T})\Big)|c_\infty| + I_g(\widetilde{T})\Big]/(1-q/2), \tag{3.9}$$

$$\sup_{t\ge T}|\widehat{x}(t) - c_\infty| \le \Big[I_A(T) + L_f I_M(T)\Big]\omega + I_g(T) \quad \forall T \ge \widetilde{T}, \tag{3.10}$$

and, if F is SVO, then the independent of ω estimate is valid:

$$\sup_{t\ge T}|\widehat{x}(t) - c_\infty| \le \Big[\Big(I_A(T) + L_f I_M(T)\Big)|c_\infty| + I_g(T)\Big]/(1-q/2) \quad \forall T \ge \widetilde{T}. \tag{3.11}$$

Considering Problem 5 with $k = 0$ and taking into account these estimates, we obtain

Theorem 2. *Let the hypothesis of Theorem 1 be satisfied. Then, for fixed c_∞, the function $\widehat{x}(t, c_\infty)$ defined by Theorem 1 is a solution to Problem 5 as a singular CP at infinity (with the condition* (2.16) *as the limit initial data); moreover if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ or F is SVO, then there is no solution to Problem 5 other than $\widehat{x}(t, c_\infty)$.*

Examining Problem 5 with $k = n$ as the accompanying to Problem 3 and taking into account the estimate (3.8), we get

Corollary 1. *Let the hypothesis of Theorem 1 be satisfied. Then Problem 3 has the n–parameter set of solutions $\widehat{x}(t, c_\infty)$ lying in the ball $S_n(\omega)$; moreover when $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ (or $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ and F is SVO), there is no set of solutions to Problem 3 and Problem 2 other than $\widehat{x}(t, c_\infty)$ given by Theorem 1.*

4. FDEs with a nonsummable singularity at infinity

For FDEs with **a nonsummable singularity at infinity**, we introduce the auxiliary values (2.7), (2.8) satisfying hypothesis (H7) that (in our opinion) replace the Caratheodory–type conditions (2.5) in more simple and natural form.

4.1. **The existence (and uniqueness) theorems.** Let (H1) and (H7) be valid and let q, ω, $\widetilde{T}$ ($0 < q < 1$, $\omega > 0$, $\Omega_n(\omega) \subseteq G_n$, $\widetilde{T} \ge T_0$)l and the values (2.7), (2.8) be such that the relations

$$\widehat{J}_M(\widetilde{T}) = \sup_{t\in I_{\widetilde{T}}} J_M(t) \le q/L_f, \tag{4.1}$$

$$\widehat{J}_g(\widetilde{T}) = \sup_{t\in I_{\widetilde{T}}} J_g(t) \le \omega(1-q) \tag{4.2}$$

hold where $L_f = L_f(\omega) > 0$. In addition, let a choice of ω, $\widetilde{T}$ and L_f be subjected to the following conditions (with the further requirements to the values (2.7) when it is necessary):

(i) if $f \in \mathrm{Lip}_{n,\delta_\varepsilon}(\varepsilon)$, then we put $L_f = \varepsilon$, $\omega = \delta_\varepsilon$ and $\widetilde{T} = T_\varepsilon$ where $\varepsilon : \varepsilon\widehat{J}_M(T_0) \le q$, so that the relation (4.1) holds; if the inequality (4.2) is not valid, then we suppose that the limit condition (2.10) is satisfied so that (4.2) holds for a suitable choice of $\widetilde{T} > T_\varepsilon$;

(ii) if $f \in \mathrm{Lip}_{n,a_0}$, then we fix q, ω and $\widetilde{T}$ ($0 < q < 1$, $0 < \omega \le a_0$, $\widetilde{T} \ge T_0$) and put $L_f = L_f(\omega) \le L_f(a_0)$; if for any choice of these values the inequality (4.1) is not valid, then we assume that the limit condition (2.11) is fulfilled so that (4.1) can be satisfied due to a suitable choice of $\widetilde{T}$; in addition, if (4.2) is not valid, then we assume that (2.10) is fulfilled to choose a new $\widetilde{T} \in I_{T_0}$;

(iii) if $f \in \mathrm{Lip}_n(a) \cup \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$, then we fix $q : 0 < q < 1$, and ω:

$$\omega \geq \omega_q = \widehat{J}_g(T_0)/(1-q), \tag{4.3}$$

and put $L_f = L_f(\omega)$; due to (4.3) the relation (4.2) holds $\forall \widetilde{T} \geq T_0$, but if for any admissible values of L_f and $\widetilde{T}$ the inequality (4.1) is not satisfied, then we introduce the requirement (2.11) to choose a new $\widetilde{T} \in I_{T_0}$.

Remark 4. If the relations (2.10) and (2.11) are fulfilled and F is SVO, then the cases (i), (ii) and (iii) can be indistinguishable (by analogy with the Caratheodory–type Theorems 1 and 2): for any fixed $\omega > 0$ ($\Omega_n(\omega) \subseteq G_n$), we choose $\widetilde{T}$ ($\widetilde{T} \geq T_0$) such that the relations (4.1) and (4.2) are valid. For the case of non–Volterra operator F, the inequalities (4.1) and (4.2) are also assumed to be fulfilled (e.g., due to a choice of entering FDEs parameters or a posteriori determination of F on the interval $I_{\widetilde{T}}$).

Let the indicated requirements be fulfilled. Let us take in $C_n(I_{\widetilde{T}})$ a closed ball by the radius ω: $S_n(\omega) = \{x(t) : x \in C_n(I_{\widetilde{T}}),\ |x|_C \leq \omega\}$. On this ball, we consider the mapping V, $V\colon C_n(I_{\widetilde{T}}) \to C_n(I_{\widetilde{T}})$, defined as follows:

$$(V(x))(t) = -\int_t^\infty U_A(t,s)[M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq \widetilde{T}. \tag{4.4}$$

If $\widehat{x}(t)$ is a fixed point of the mapping (4.4), then $\widehat{x} \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$ and satisfies Eq.(2.1).

Then for each fixed F satisfying (H2) and $\forall x, \tilde{x} \in S_n(\omega)$, we get:

$$\begin{gathered}|V(x)|_C \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|FNx|_\infty + \widehat{J}_g(\widetilde{T}) \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|Nx|_C + \widehat{J}_g(\widetilde{T}) \leq \\ \leq L_f \widehat{J}_M(\widetilde{T})|x|_C + \widehat{J}_g(\widetilde{T}) \leq q\omega + (1-q)\omega = \omega,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}|V(x) - V(\tilde{x})|_C \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|FNx - FN\tilde{x}|_\infty \leq \\ \leq \widehat{J}_M(\widetilde{T})|Nx - N\tilde{x}|_C \leq L_f \widehat{J}_M(\widetilde{T})|x - \tilde{x}|_C \leq q|x - \tilde{x}|_C.\end{gathered}$$

Theorem 3. *Let* (H1) *and* (H7) *be fulfilled and let for a chosen q, $0 < q < 1$, the values ω and $T = \widetilde{T}$ be defined as above. Then for any given mapping F satisfying* (H2) *there exists a unique fixed point $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in S_n(\omega)$, of the mapping V defined by* (4.4)*; it can be specified as the limit*

$$\widehat{x} = \lim_{k\to\infty} V^k(x_0) \tag{4.5}$$

for any starting point x_0, $|x_0|_C \leq \omega$, and, for the rate of convergence, we have the estimate

$$|V^k(x_0) - \widehat{x}|_C \leq [q^k/(1-q)]|V(x_0) - x_0|_C. \tag{4.6}$$

A global convergence of successive approximations to $\widehat{x}$ (i.e., $\forall x_0 \in C_n(I_{\widetilde{T}})$) occurs when: 1) $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ and $L_f > 0$ is independent of ω constant; 2) $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$, F is SVO and (H9) *holds but in this case a choice of $\widetilde{T}$ a posteriori depends on a choice of x_0 determining in turn a choice of ω, $\omega \geq \max\{|x_0|_C, \omega_q\}$, and $L_f = L_f(\omega)$ to satisfy* (4.1), (4.2).

For function $\widehat{x}(t)$, defined by Theorem 3, the additional estimates follow from Eqs.(2.17), (4.4):

$$|\widehat{x}|_C \leq \widehat{J}_g(\widetilde{T})/(1-q), \tag{4.7}$$

$$\sup_{t\geq T} |\widehat{x}(t)| \leq \widehat{J}_g(T) + L_f \widehat{J}_M(T)\omega \qquad \forall T \geq \widetilde{T}, \tag{4.8}$$

and, if F is SVO, then independent of ω estimate is valid:

$$\sup_{t\geq T} |\widehat{x}(t)| \leq \widehat{J}_g(T)/(1-q) \qquad \forall T \geq \widetilde{T}. \tag{4.9}$$

Using these estimates, we obtain

Corollary 2. *Let the hypothesis of Theorem 3 be satisfied. Then: 1) the constructed function $\widehat{x}(t)$, $\widehat{x} \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$, is a solution to Problem 1; 2) when either* (H8) *holds and F is SVO or* (H8) *and* (H9) *hold, then $\widehat{x}$ is a solution to Problem 4 as a singular CP at infinity; 3) if at least F is (generalized) LNO then: if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ then $\widehat{x}(t)$ exists in the large on $[T_0, \infty)$ while if $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ then $\widehat{x}(t)$ is uniquely* *extendible to the left as long as it remains bounded (at least to $\widetilde{T}_0 \geq T_0$ such that $\widehat{J}_M(\widetilde{T}_0) \leq q_0/L_f(\omega_{q_0})$ where $q_0 : q_0/L_f(\omega_{q_0}) = \sup\limits_{0<q<1} q/L_f(\omega_q)$); 4) $\widehat{x}(t) \equiv 0$ on $I_{\widetilde{T}}$ iff $g(t) = 0$ a.e. on $I_{\widetilde{T}}$.*

For Eq.(2.1), we use the method of variation of parameters to obtain the general equation

$$x(t) = \Phi_A(t)p - \int_t^{\infty} U_A(t,s)[M(s)(FNx)(s) + g(s)]ds, \quad t \geq \widetilde{T},$$

where p is a vector of arbitrary constants, $p \in \mathbb{K}^n$. Comparing this equation with Eq.(2.17) where V is given by (4.4), we obtain

Theorem 4. *Let* (H4) *be valid and let otherwise the hypothesis of Theorem 3 be satisfied. Then: 1) for any given mapping F satisfying* (H2)*, Problem 1 is equivalent, on the function class $AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$, to the operator Eq.*(2.17) *where V is defined by* (4.4) *so that Problem 1 has a unique solution $\widehat{x}(t)$ defined by Theorem 3; 2) if F is SVO and* (H8) *holds then $\widehat{x}(t)$ is a unique solution to Problem 4; 3) if* (H8) *and* (H9) *are valid and $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$, then $\widehat{x}(t)$ is a unique solution to Problem 4; 4) if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ (or $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$, F is SVO and* (H9) *is true) then $\widehat{x}$ is a unique solution to Problem 2, i.e., it is a unique bounded solution to Eq.*(2.1).

Theorem 5. *Let* (H5) *and* (H8) *be valid and let otherwise the hypothesis of Theorem 3 be satisfied. Then for any given F satisfying* (H2)*, if only* (H9) *holds or F is SVO, Problem 4 is equivalent to the functional–integral Eq.*(2.17) *with V defined by* (4.4)*. Moreover, if F is SVO (or $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ and* (H9) *is valid) then there is no solution to Problem 4 other than $\widehat{x}(t)$ defined by Theorem 3; otherwise $\widehat{x}$ is at least a unique solution to Problem 4 lying in the fixed ball $S_n(\omega)$.*

Corollary 3. *If $A(t) \equiv 0$, then Theorem 5 turns into the Caratheodory–type theorem.*

Remark 5. Theorem 5 includes the existence and uniqueness theorem of [1] relating to singular CP for a system of FDEs with a Volterra operator and the limit initial data at a pole–type singular point.

Remark 6. For Eq.(2.1) with a non–Volterra operator F and a nonsummable singularity at infinity, only Problems 1 and 2 without initial data were considered in [3], [4]. It became clear, after a study in detail of Eq.(2.1) with a summable singularity at infinity, that the hypotheses (H8) and (H9) are important to pose and study singular CPs for above–mentioned case.

4.2. **The existence of parametric set of solutions to Problem 3.** In what follows we assume that the hypotheses (H6), (H8) and (H9) are satisfied and we consider Problem 5 (and its association with Problem 3) where by $M^{(k)}$ we keep in mind the k–dimensional subspace in $\mathbb{K}^n$ generated by the constant kernel of $A(t)$.

We fixed q and ω $(0 < q < 1,\ \omega > 0,\ \Omega_n(\omega) \subseteq G_n)$ and choose $\widetilde{T}$ $(\widetilde{T} \geq T_0)$ to satisfy the inequalities

$$\widehat{J}_M(\widetilde{T}) = \sup_{t \in I_{\widetilde{T}}} J_M(t) \leq q/(2L_f), \tag{4.10}$$

$$\widehat{J}_g(\widetilde{T}) = \sup_{t \in I_{\widetilde{T}}} J_g(t) \leq \omega(1-q)/2, \tag{4.11}$$

where $L_f = L_f(\omega) > 0$. Let c_∞ be a constant vector belonging to a contraction of the kernel of $A(t)$ on the domain $\Omega_n(\omega/2)$:

$$c_\infty : \quad A(t)c_\infty = 0 \quad \text{a.e. on } I_{T_0}, \quad |c_\infty| \leq \omega/2. \tag{4.12}$$

Considering Problem 5 with $T = \widetilde{T}$ and setting

$$y = x - c_\infty, \qquad y + c_\infty \in G_n, \tag{4.13}$$

we obtain, for $y(t)$, a singular CP with the parameters which can be written in the form:

$$y' = A(t)y + M(t)[(FN(y + c_\infty))(t) - (FNc_\infty)(t)] + M(t)(FNc_\infty)(t) + g(t) \text{ a.e. on } I_{\widetilde{T}}, \tag{4.14}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0. \tag{4.15}$$

We take in $C_n(I_{\widetilde{T}})$ a closed ball $S_n(\omega/2)$ and on this ball we consider the mapping V, V: $C_n(I_{\widetilde{T}}) \to C_n(I_{\widetilde{T}})$, defined as follows

$$\begin{aligned}(V(y))(t) = -\int_t^\infty U_A(t,s)\Big[M(s)\Big((FN(y+c_\infty))(s) - (FNc_\infty)(s)\Big)+ \\ +M(s)(FNc_\infty)(s) + g(s)\Big]ds, \qquad t \geq \widetilde{T}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

We introduce the operator equation

$$y(t) = (V(y))(t), \qquad t \geq \widetilde{T}, \tag{4.17}$$

and considering (4.14), (4.15) as independent singular CP with the parameters, we obtain (by the analogy with the previous theorems)

Theorem 6. *Let the hypotheses* (H5), (H8) *and* (H9) *be fulfilled and let for fixed* q *and* ω *(* $0 < q < 1$, $\omega > 0$, $\Omega_n(\omega) \subseteq G_n$ *) the value* $\widetilde{T} = T$ $(\widetilde{T} \geq T_0)$ *be defined as above so that the inequalities* (4.10) *and* (4.11) *are valid; let* c_∞ *be a fixed constant vector belonging to the domain* $\Omega_n(\omega/2)$. *Then for any given* F *satisfying* (H2) *singular CP* (4.14), (4.15) *is equivalent to the operator Eq.*(4.17) *where* V *is defined by* (4.16). *Eq.*(4.17) *has a unique solution* $\widehat{y}(t)$ *belonging to the ball* $S_n(\omega/2)$*; it can be specified as the limit*

$$\widehat{y} = \lim_{k\to\infty} V^k(y_0),$$

for any starting point y_0, $|y_0|_C \leq \omega/2$, *and, for the rate of convergence, we have usual estimate*

$$|V^k(y_0) - \widehat{y}|_C \leq [(q/2)^k/(1-q/2)]|V(y_0) - y_0|_C;$$

if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ *or* F *is SVO then the function* $\widehat{y}(t)$, $\widehat{y} \in AC_n^{\mathrm{loc}}(I_{\widetilde{T}})$, *is a unique solution to singular CP* (4.14), (4.15).

Returning to Eq.(2.1) and taking into account the replacement (4.13), we obtain

Theorem 7. *Let the hypothesis* (H6) *be valid and let* c_∞ *be a fixed vector satisfying relations* (4.12)*; otherwise let the hypothesis of Theorem 6 be satisfied. Then for any given* F *satisfying* (H2) *singular CP* (2.1), (2.16) *has a solution* $\widehat{x}(t,c_\infty) = \widehat{y}(t,c_\infty) + c_\infty$ *where* $\widehat{y}(t,c_\infty)$ *is a solution of singular CP* (4.14), (4.15) *constructed by Theorem 6, and the following estimates are valid:*

$$|\widehat{x}|_C \leq \omega,$$

$$|\widehat{x} - c_\infty|_C \leq [L_f \widehat{J}_M(\widetilde{T})|c_\infty| + \widehat{J}_g(\widetilde{T})]/(1-q/2),$$

$$\sup_{t\geq T} |\widehat{x}(t) - c_\infty| \leq L_f \widehat{J}_M(T)\omega + \widehat{J}_g(T) \qquad \forall T \geq \widetilde{T},$$

and if F *is SVO then we have also the estimate*

$$\sup_{t\geq T} |\widehat{x}(t) - c_\infty| \leq [L_f \widehat{J}_M(T)|c_\infty| + \widehat{J}_g(T)]/(1-q/2) \quad \forall T \geq \widetilde{T};$$

if $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ *or* F *is SVO, then the function* $\widehat{x}(t,c_\infty)$ *is a unique solution to Problem 5 as a singular CP.*

Corollary 4. *Let the hypothesis of Theorem 7 be satisfied. Then for any given* F *satisfying* (H2)*, there exists a* k*–parameter set of solutions* $\widehat{x}(t,c_\infty)$ *to Problem 3 lying in the ball* $S_n(\omega)$ *where the vector of parameters* c_∞ *(the limit vector for the set of solutions) is subjected to the conditions* (4.12). *If* $f \in \widetilde{\mathrm{Lip}}_n$ *(or* $f \in \mathrm{Lip}_n(a)$ *and* F *is SVO) then there is no set of solutions to Problem 3 and Problem 2 other than constructed by Theorem 7.*

Remark 7. Other theorems of the existence of n–parameter set of the bounded solutions to Eq.(2.1) (a stable case) are obtained in [3]. For the existence of k–parameter set of bounded solutions $(1 \leq k \leq n)$, which values form in a phase space a k–dimensional stable initial manifold (a conditionally stable case), the corresponding theorems, for Eq.(2.1) with a Volterra operator, are given in [10]. The indicated theorems of [3], [10] can be extended on more wide class of FDEs by the methods of the present paper.

Concluding remarks. For the particular cases of nonlinear systems of ODEs, some near results for singular CPs have been obtained earlier (see, e.g., [11]–[13] and references therein).

It is possible to specify the numerous applications of above–mentioned results for ODEs to correct statement, approximation and analytic–numerical study of singular CPs and BVPs, including those arising in the models of hydromechanics, cosmology, astrophysics, quantum mechanics, etc. (e.g., for the recent applications of some results of [11], see [14], [15]).

Besides the pure mathematical interest in extending the theory of singular CPs on the wide enough class of FDEs, the development of this direction is stimulated by the problems of quantum mechanics, in particular, by the known singular problems for the Schrödinger IDEs describing the bound states or a scattering of elementary particles in the field of nonlocal potential (see, e.g., [16], [17]). Some history of the problem and the model examples for FDEs, see, e.g., in [3], [4].

The work was supported by RFBR, project No.05–01–00257.

References

[1] *Russell, D.L.* Numerical solution of singular initial value problems //SIAM J. Numer. Analys. 1970. Vol.7. No.3. P.399–417.

[2] *Konyukhova, N.B.* Existence and uniqueness of solutions of singular Cauchy problems for systems of nonlinear functional differential equations// Dokl. AN SSSR. 1987. Vol.295. No.4. P.798–801 [Soviet Math. Dokl. 1988. Vol.36. No.1. P.126–128].

[3] *Konyukhova, N.B.* Singular Cauchy problems for some systems of nonlinear functional–differential equations //Differents. Uravn. 1995. Vol.31. No.8. P.1340–1347 [Diff. Eq. 1995. Vol.31. No.8. P.1286–1293].

[4] *Konyukhova, N.B.* Singular Cauchy problems and problems without initial data for nonlinear systems of functional–differential equations // Uchenye zapiski natsional'nogo Tavricheskogo Universiteta im. V.I.Vernadskogo. Matematika. Mekhanika. Informatika i Kibernetika (Learning Notations of National Taurida V.I.Vernadsky University. Mathematics. Mechanics. Computer Science and Cybernetics). 2002. Vol.15(54). No.1. P.136–141.

[5] *Azbelev, N.V., Maksimov, V.P. and Rakhmatulina, L.F.* Introduction to the Theory of Functional–Differential Equations// Moscow: Nauka, 1991 [in Russian].

[6] *Coddington, E.A. and Levinson, N.* Theory of Ordinary Differential Equations// New York–Toronto–London: McGraw–Hill Book Co., Inc., 1955.

[7] *Kudryavtsev, L.D.* Stabilization problems for ordinary differential equations// Differents. Uravn. 1993. Vol.29. No.12. P.2056–2078 [Diff. Eq. 1993. Vol.29. No.12. P.1789–1810].

[8] *Chechik, V.A.* The investigation to systems of ordinary differential equations with a singularity// Trudy Moskov. Matem. Obsch. 1959. Vol.8. P.155–197 [in Russian].

[9] *Trenogin, V.A.* Functional Analysis// Moscow: Nauka, 1980 [in Russian].

[10] *Konyukhova, N.B.* On the existence of stable initial manifolds for systems of nonlinear functional–differential equations// Dokl. AN SSSR. 1989. Vol.306. No.3. P.535–540 [Soviet Math. Dokl. 1989. Vol.39. No.3. P.519–523].

[11] *Konyukhova, N.B.* Singular Cauchy problems for systems of ordinary differential equations// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1983. Vol.23. No.3. P.629–645 [U.S.S.R. Comput. Maths Math. Phys. 1983. Vol.23. No.3. P.72–82].

[12] *Werner, T.* The Cauchy–Nicoletti problem with poles// Georgian Math. J. 1995. Vol.2. No.2. P.211–224.

[13] *Konyukhova, N.B.* Singular Cauchy problems for singularly perturbed systems of nonlinear ordinary differential equations// I – Differents. Uravn. 1996. Vol.32. No.1. P.52–61 [Diff. Eq. 1996. Vol.32. No.1. P.54–63]; II – Differents. Uravn. 1996. Vol.32. No.4. P.491–500 [Diff. Eq. 1996. Vol.32. No.4. P.491–500.]

[14] *Voronov, N.A., Dyshko, A.L. and Konyukhova, N.B.* On the stability of a self–similar spherical bubble of a scalar Higgs field in the de Sitter space// Yadernaya Fizika. 2005. Vol.68. No.7. P.1268-1276 [Physics of Atomic Nuclei. 2005. Vol.68. No.7. P.1218–1226].

[15] *Lima, P.M., Konyukhova, N.B., Sukov, A.I. and Chemetov, N.V.* Analytical–numerical investigation of bubble–type solutions of nonlinear singular problems// J. Comput. Appl. Math. (Elsevier Science). 2006. Vol.189. P.260–273.

[16] *Yamaguchi, Y.* Two-nuclear problem when the potential is nonlocal but separable. I // Phys. Rev. 1954. Vol.95. No.6. P.1628–1634.

[17] *Gareev, F.A. et al.* Numerical solution of eigenvalue problems for integro–differential equations in nuclear theory// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1977. Vol.17. No.2. P.407–419 [U.S.S.R. Comput. Maths Math. Phys. 1977. Vol.17. No.2. P.116–128].

WEAKLY COERCIVE NONQUASIELLIPTIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL OPERATORS IN SOBOLEV SPACES $W_p^l(\mathbb{R}^n)$

Limansky D.V., Malamud M.M.
Donetsk National University,
Donetsk, Ukraine

1. Introduction

Let $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. It is well known that a system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of differential operators is coercive in the (anisotropic) Sobolev spaces $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ with $p \in (1,\infty)$ if and only if it is l - quasielliptic [3, 4, 5, 6]. If $p = 1;\infty$, this criterion ceases to be true [14, 16].

De Leeuw and Mirkil [9] characterized elliptic operators by means of estimates in $C(\mathbb{R}^n)$. Namely, they proved that the ellipticity of an operator $P(D)$ of order $l \geq 2$ is equivalent to its weak coercivity in the isotropic ($l_1 = \dots = l_n$) Sobolev space $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ for $n \geq 3$ (see Definition 2). In [11], we have obtained the analogue of this result for the anisotropic case (Theorem 6). More precisely, it has been shown in [11] that, under some restrictions to the vector l, the l-quasiellipticity of an operator $P(D)$ is equivalent to its weak coercivity in $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$. A question whether the conditions of Theorem 6 are sharp has not been investigated yet, with the only exception of the case of $n = 2$ (see [11]). It turned out that this question is related to the problem of existence of l - quasielliptic operators with l fixed.

In this communication we specify wide classes of weakly coercive nonquasielliptic operators for almost all systems $(l_1, \dots, l_n)$. Besides, in the case of $n = 2$ we completely describe operators that are weakly coercive in the scale of isotropic Sobolev spaces $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$. In particular, we claim that any strictly hyperbolic operator $P(D_1, D_2)$ becomes weakly coercive in $W_1^l(\mathbb{R}^n)$ after a suitable perturbation of $P(D)$ by an operator of order $l-1$

Furthermore, we completely describe vectors l such that l - quasielliptic systems exist (Theorem 1). At the same time, the analogous problem for weakly coercive systems in the scale $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ is solved only partially (Theorems 7 and 8). It should be noted that proofs of mentioned results rely on topological arguments (Borsuk theorem [15, 17] and Brouwer theorem [8]).

Notation. $\mathbb{R}$ denotes the field of real numbers, $\mathbb{N}$ is the set of positive integers, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n factors). Further, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$; for each multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, we set $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$. If $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ and $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, we put $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$. Denote $\mathbb{S}_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = r\}$ the n-dimensional sphere of radius r, $\mathbb{S}^n := \mathbb{S}_1^n$.

2. Elliptic and quasielliptic operators

Let Ω be an arbitrary domain in $\mathbb{R}^n$, $p \in [1;\infty]$. In $L^p(\Omega)$ we consider a system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of differential operators having the form

$$P_j(x,D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \dots, N\}. \tag{2.1}$$

Further, let $P_j^l(x,D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$ be the principal part of the operator $P_j(x,D)$, and let $P_j^l(x,\xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\xi^\alpha$ be its principal l - quasihomogeneous symbol.

Definition 1. [6, 7] A system of differential operators $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of form (2.1) is said to be l - quasielliptic if

$$\left(P_1^l(x,\xi), \dots, P_N^l(x,\xi)\right) \neq 0, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

In particular, if $l_1 = \dots = l_n = l$, then the system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ is called elliptic system of order l.

The next assertion describes all systems $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ such that l - quasielliptic systems exist.

Theorem 1. *Assume that $n \geq 2N+1$. For l - quasielliptic systems $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of form (2.1) to exist, it is necessary and sufficient that there are at least two even numbers among $l_1, \dots, l_n$.*

Outline of the proof. (i) Necessity. Let, at first, all numbers l_j be odd, and let $n = 2N+1$. (If $n > 2N+1$, we restrict polynomials $\{P_j(x,\xi)\}_1^N$ to a k - dimensional subspace with $k = 2N+1$.) Set $x_0 \in \Omega$ and consider the mapping $T := (T_1, \ldots, T_{2N}) : \ \mathbb{S}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$, where

$$T_{2j-1}(\xi) := \Re\, P_j^l(x_0,\xi), \qquad \text{and} \qquad T_{2j}(\xi) := \Im\, P_j^l(x_0,\xi), \qquad j \in \{1, \ldots, N\}. \tag{2.2}$$

Since the mapping T is odd, $T(-\xi) = -T(\xi)$, then by Borsuk theorem [17, p. 344], $T(\xi^0) = 0$ at a some point $\xi^0 \in \mathbb{S}^{2N}$. This contradicts the assumption of the l - quasiellipticity of the system $\{P_j(x,D)\}_1^N$.

(ii) If there is exactly one even number among l_j, we can reduce this case to the case mentioned above by means of simple number-theoretic arguments.

(iii) Sufficiency. Let $n = 2N+1$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, with $l_1, \ldots, l_{n-2}$ odd numbers, and with l_{n-1} and l_n even numbers. Then the system

$$P_1(\xi) = \xi_1^{l_1} + i\xi_2^{l_2}, \quad \ldots, \quad P_{N-1}(\xi) = \xi_{n-4}^{l_{n-4}} + i\xi_{n-3}^{l_{n-3}}, \quad P_N(\xi) = i\xi_{n-2}^{l_{n-2}} + \xi_{n-1}^{l_{n-1}} + \xi_n^{l_n}$$

is l - quasielliptic, and also there are exactly two even numbers among l_j. □

Corollary 1. *For $n \geq 3$, l - quasielliptic operators exist if and only if there is at most one odd number among $l_1, \ldots, l_n$.*

In the isotropic case, Theorem 1 takes the next form.

Corollary 2. *Let $l_1 = \cdots = l_n = l$, and let a system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of form (2.1) be elliptic. If $n \geq 2N+1$, then l is even.*

Remark 8. (i) The condition $n \geq 2N+1$ of Theorem 1 is sharp. In fact, we consider (for $n = 2N$) the system of the form

$$P_1(D) := D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}, \quad \ldots, \quad P_N(D) := D_{2N-1}^{l_{2N-1}} + iD_{2N}^{l_{2N}}. \tag{2.3}$$

We see that system (2.3) is l - quasielliptic for every $l = (l_1, \ldots, l_{2N})$. Thus, Theorem 1 is no longer true whenever $n \leq 2N$.

(ii) Ya. B. Lopatinskii [13] (see also [1, 12, 18]) proved the following more stronger statement (as in Theorem 1) at $N = 1$: if $n \geq 3$, then an elliptic operator $P(D)$ is correctly elliptic and, in part, it has an even order.

3. Weak coercivity in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$. Isotropic case

Now we characterize elliptic systems by means of a priori estimates in isotropic Sobolev spaces $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ with $p \in [1, \infty]$.

Following [11] we recall the weak coercivity concept for a system of differential operators in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$. Put $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$.

Definition 2. [11] We say that a system of differential operators $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of form (2.1) is called weakly coercive in the (anisotropic) Sobolev space $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ if the estimate

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_p + C_2\|f\|_p \tag{3.1}$$

holds, with C_1 and C_2 do not depend on $f \in \overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$.

Moreover, system (2.1) is said to be (see [5]) coercive in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ if

$$\sum_{|\alpha:l|\leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_p + C_2\|f\|_p, \tag{3.2}$$

that is the summation in the left-hand side of (3.1) is taken over α satisfying the condition $|\alpha : l| \leq 1$ instead of $|\alpha : l| < 1$.

Note that in the case of isotropic Sobolev space $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$, the inequality $|\alpha : l| < 1$ ($|\alpha : l| \leq 1$) in (3.1) takes the usual form $|\alpha| < l$ ($|\alpha| \leq l$).

In [4, 5] (see also [3]) we have proved the coercivity criterion for a system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ $\big(W_p^l(\Omega)\big)$ with $p \in (1,\infty)$. The coercivity criterion in $\overset{o}{W}{}_\infty^l(\Omega)$ has been obtained in [14]. Note that an elliptic system is not coercive in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ if either $p=1$ or $p=\infty$, though it is weakly coercive in $\overset{o}{W}{}_\infty^l(\Omega)$ (see [14]) and in $\overset{o}{W}{}_1^l(\Omega)$ (see [11]).

The next statement describes a connection between the ellipticity and the weak coercivity in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ with any fixed $p \in [1,\infty]$.

Proposition 1. Fix any $p \in [1,\infty]$. A system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of order l is elliptic if and only if for any $\varepsilon > 0$ there exists $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\sum_{|\alpha|\le l-1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_p + C_\varepsilon \|f\|_p, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

We mention some properties of weakly coercive systems.

Proposition 2. Suppose that a system $\{P_j(D)\}_1^N$ is weakly coercive in the isotropic space $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, $l \ge 2$. Then we have:

(i) The set of joint real zeros $\{\xi \in \mathbb{R}^n : P_1(\xi) = \cdots = P_N(\xi) = 0\}$ of polynomials $\{P_j(\xi)\}_1^N$ is a compact set.

(ii) For every system $\{Q_j(D)\}_1^N$, $\deg Q_j \le l-2$, the system $\{P_j(D)+Q_j(D)\}_1^N$ is weakly coercive in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ either.

(iii) Let $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ be a zero of the mapping $P^l = \big(P_1^l, \dots, P_N^l\big)$, i. e., $P_1^l(\xi^0) = \cdots = P_N^l(\xi^0) = 0$, $T_{2j-1}(\xi) := \Re\, P_j^l(\xi)$ и $T_{2j}(\xi) := \Im\, P_j^l(\xi)$, $j \in \{1,\dots,N\}$. If $n \ge 2N+1$, then the rank of the Jacobi matrix of the mapping $T := (T_1,\dots,T_{2N}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N}$ is less than $2N$ at the point ξ^0.

(iv) Let $N=1$, $n \ge 2$, and let $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ be a zero of the polynomial $P_1^l(\xi)$. Then $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial P_1^l}{\partial \xi_1}(\xi^0), \dots, \frac{\partial P_1^l}{\partial \xi_n}(\xi^0)\right) = 1$. In particular, for $n=2$ the polynomial $P_1^l(\xi)$ has only simple zeros.

Remark 9. (i) We use topological arguments in the proof of statement (iii). In part, Brouwer theorem [8, c. 316] has been used.

(ii) The condition $n \ge 2N+1$ of statement (iii) is exact. So the rank of the Jacobi matrix of the system $\{(\xi_1+i)(\xi_2+i),\ (\xi_3+i)(\xi_4+i)\}$ equals 1 at the point $(1,0,0,0)$, and it is equal 2 at the point $(1,0,1,0)$.

4. Characteristic of weakly coercive operators in two variables

De Leeuw and Mirkil [9] characterized an elliptic operator as follows.

Theorem 2. [9] *If $n \ge 3$, the ellipticity of a differential polynomial $P(D)$ of order $l \ge 2$ is equivalent to its weak coercivity in $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$.*

In the same paper [9], Malgrange's example of weakly coercive in $W_\infty^2(\mathbb{R}^2)$ but nonelliptic operator $P(D) = (D_1+i)(D_2+i)$ is described.

The following assertions yield both the complete characteristic of weakly coercive operators in the scale od isotropic Sobolev spaces $W_p^l(\mathbb{R}^2)$ with $p \in [1,\infty]$, and also the algebraic weak coercivity criterion.

Theorem 3. *An arbitrary weakly coercive operator of order $l \ge 2$ in the isotropic space $W_p^l(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1,\infty]$, can be represented in the form*

$$R(D) = P(D) \prod_{k=1}^m (\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k) + Q(D). \tag{4.1}$$

Here $P(D)$ is an elliptic operator of order $l-m$, $Q(D)$ is an arbitrary operator of order $\le l-2$, $\alpha_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, and (λ_k,μ_k) are mutually noncollinear vectors in $\mathbb{R}^2$, $k \in \{1,\dots,m\}$, $m \le l$.

Corollary 3. *A product of an elliptic operator of order l in two variables and a weakly coercive operator in $W_p^m(\mathbb{R}^2)$ of order m is a weakly coercive operator in $W_p^{l+m}(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1,\infty]$.*

As usual we denote by

$$P^{l-1}(\xi) := \sum_{|\alpha|=l-1} a_\alpha \xi^\alpha$$

the $(l-1)$ – homogeneous part of the polynomial $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le l} a_\alpha \xi^\alpha$.

Theorem 4. *An operator $P(D)$ of order l is weakly coercive in the scale of isotropic spaces $W_p^l(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1,\infty]$ if and only if the polynomials $P^l(\xi)$ and $\Im\, P^{l-1}(\xi)$ have no common nontrivial real roots.*

Remark 10. (i) The condition of Theorem 4 can be rewritten in terms of a resultant $R[f,g]$ of polynomials f and g as follows: $R\left[P^l, \Im\, P^{l-1}\right](\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. So in order to verify the weak coercivity of $P(D)$ we do not need to calculate roots of the polynomial $P^l(\xi)$.

(ii) Theorem 3 together with Proposition 2 show that any strictly hyperbolic operator of order l in two variables becomes weakly coercive in $W_p^l(\mathbb{R}^2)$, $p \in [1,\infty]$, after a suitable perturbation by an operator of order $l-1$. Note that we cannot achieve this by perturbations of order $l-2$.

(iii) Operators (4.1) remain weakly coercive in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$ in the case of arbitrary (bounded including) domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. But these operators do not describe all totality of weakly coercive operators in $\overset{o}{W}{}_p^l(\Omega)$.

(iv) Theorem 3 allows to supplement the results from [10]. Namely, due to [10], the d'Alembert operator $\Box := D_1^2 - a^2 D_2^2$ is not weakly coercive in $\overset{o}{W}{}_\infty^2(\Omega)$, where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^2$. But according to Theorem 4 we can attain the weak coercivity of this operator in $W_\infty^l(\mathbb{R}^2)$ and hence in $\overset{o}{W}{}_\infty^2(\Omega)$, by perturbing the operator $\Box$ by terms of order $\le l-1$.

5. Weakly coercive nonelliptic homogeneous systems

The next theorem specifies wide classes of weakly coercive in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$, but not elliptic systems.

Theorem 5. *Let $\{P_j(D)\}_1^N$ be an elliptic system of order l, let $\alpha_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, and let (λ_k, μ_k) be mutually noncollinear vectors in $\mathbb{R}^2$, $k \in \{1,\dots,m\}$. Denote*

$$R_{pq}(D) := \prod_{k=1}^{m} \left(\lambda_k D_p + \mu_k D_q + \alpha_k\right), \qquad D_k := -i\partial/\partial x_k. \tag{5.1}$$

Then the system of operators

$$S_{jpq}(D) := P_j(D) R_{pq}(D), \qquad j \in \{1,\dots,N\},\ p,\ q \in \{1,\dots,n\},\ p > q,$$

is weakly coercive in $W_p^{l+m}(\mathbb{R}^n)$ with $p \in [1,\infty]$ but not elliptic.

Corollary 4. *Suppose that (λ_k, μ_k), $k \in \{1,\dots,m\}$ are mutually noncollinear vectors in $\mathbb{R}^2$, $P(D)$ is an elliptic operator of order l, and $R_{pq}(D)$ are operators* (5.1)*. Then the system $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$ is weakly coercive in $W_p^{l+m}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$ but not elliptic.*

Proposition 3. The formulation of Theorem 5 is exact at $N = 1$ and $p = \infty$. To be precise, any system obtained from $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$, with $P(D)$ an elliptic operator of order l and with $R_{pq}(D)$ operators of form (5.1), by removing at least one operator loses the property of being weakly coercive in $W_\infty^{l+m}(\mathbb{R}^n)$.

Remark 11. Proposition 3 shows that Corollary 3 is generally violated in the case of $N > 1$ and $p = \infty$. For example, the system

$$(D_1^2 + \cdots + D_4^2)(D_1 + i)(D_2 + i), \quad (D_1^2 + \cdots + D_4^2)(D_3 + i)(D_4 + i)$$

is not weakly coercive in $W_\infty^4(\mathbb{R}^4)$.

6. Weak coercivity in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$. Anisotropic case

First we recall the following result from [11].

Theorem 6. [11] *Suppose additionally that $l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_n$, and at least one of the two following conditions holds:*

(i) $l_{n-2} = l_{n-1} = l_n$;

(ii) l_n does not divide at least one of the numbers l_j for $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Then the operator $P(D)$ of the form

$$P(D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_{j\alpha} D^\alpha \tag{6.1}$$

is weakly coercive in the anisotropic Sobolev space $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ if and only if it is l - quasielliptic.

Remark 12. (i) By Theorem 6, the weak coercivity of a differential polynomial in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ is equivalent to its l - quasiellipticity for almost all systems $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$.

(ii) Theorem 6 is not a complete analogue of the de Leeuw and Mirkil Theorem 2 because of number-theoretic restrictions to components of a vector l. Such effects appear in [7, Ch.4] for operators with quasihomogeneous principal parts defined by the Newton polyhedron.

We turn our attention to the sharpness of sufficient conditions from Theorem 6.

Given a vector $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n,\ l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$. We are interested in the following problems. Whether do exist weakly coercive in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ but nonquasielliptic operators if

(1) there exist at least two odd numbers among $l_j,\ n \geq 3$;

(2) l - quasielliptic operators exist but both conditions (i) and (ii) of Theorem 6 are violated?

Conjecture 1. There are weakly coercive nonquasielliptic operators in the anisotropic Sobolev space $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ for $n \geq 3$ if and only there exist l - quasielliptic operators, i. e., if there is at most one odd number among the numbers l_j (see Corollary 1).

Proposition 4. Let $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{n-k} > l_{n-k+1} = \cdots = l_n$, and let an operator $P(D)$ of form (6.1) be weakly coercive in $W^l_\infty(\mathbb{R}^n)$. Then its principal l - homogeneous symbol $P^l(\xi)$ can vanish only at points from the k - dimensional subspace $\xi_1 = \cdots = \xi_{n-k} = 0$.

The following theorem spreads the "half"of Theorem 1 to the case of weakly coercive systems.

Theorem 7. *Suppose that a system $\{P_j(x,D)\}_1^N$ of form (2.1) is weakly coercive in $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, $n \geq 2N+1$, and the mapping $P^l := (P^l_1, \ldots, P^l_N) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N}$ has a finite number of zeros on the sphere $\mathbb{S}^{n-1}$. Then at least one number of $l_1, \ldots, l_n$ is even.*

Outline of the proof. Let $n = 2N+1$. Since the mapping P^l has only a finite number of zeros on $\mathbb{S}^{n-1}$, then there exists a sphere $\mathbb{S}^{n-2}$ such that $P^l \lceil \mathbb{S}^{n-2}$ has no zeros. Without loss of generality, we can assume that $\mathbb{S}^{n-2} := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} :\ x_n = 0\}$.

If all l_j are odd, then the mapping

$$T^r(\xi) := (T_1(\xi), \ldots, T_{2N}(\xi))/\|P^l(\xi)\|^{-1} :\ \mathbb{S}^{n-2}_r \to \mathbb{S}^{n-2}_r,$$

where $T_j(\xi),\ j \in \{1, \ldots, 2N\}$, are functions determined in (2.2), is continuous and odd. By Borsuk theorem [15, p. 27], it has an odd degree, $\deg T^r = 2k+1$, and hence it is homotopy-nontrivial.

Alongside the mapping T^r we consider the mapping

$$Q^r := (Q_1, \ldots, Q_{2N}) :\ \mathbb{S}^{n-2}_r \to \mathbb{R}^{n-1}$$

where

$$Q_{2j-1}(\xi) := \Re\, P_j(x_0, \xi), \qquad Q_{2j}(\xi) := \Im\, P_j(x_0, \xi), \qquad j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Since $T^r(\xi) \neq 0$ for $\xi \in \mathbb{S}^{n-2}_r$, it is not difficult to show that the mapping Q^r has no zeros (on the sphere) for large r. On the other hand, the mappings $T^r :\ \mathbb{S}^{n-2}_r \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ and $Q^r :\ \mathbb{S}^{n-2}_r \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ are homotopic in the space of continuous mappings from $\mathbb{S}^{n-2}_r$ to $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Therefore the mapping Q^r is also homotopy-nontrivial and hence every its extension into the (closed) disk $\mathbb{D}^{n-1}_r := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} :\ \|x\| \leq r\}$ has a zero. As far as $\mathbb{S}^{n-1}_{+r} := \{x \in \mathbb{S}^{n-1}_r :\ x_n \geq 0\}$ is homeomorphic to $\mathbb{D}^{n-1}_r$, the mapping $P :\ \mathbb{S}^{n-1}_{+r} \to \mathbb{R}^{n-1}$ has zeros for large r. This contradicts Proposition 2(i). $\square$

Corollary 5. *Let $n \geq 3$, and let an operator $P(D)$ of form (6.1) be weakly coercive in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$. Let also the symbol $P^l(\xi)$ have a finite number of zeros on the sphere $\mathbb{S}^{n-1}$. Then there are at most two odd numbers among $l_1, \ldots, l_n$.*

Combining Proposition 4 and Theorem 7 we obtain

Corollary 6. *Suppose that $n \geq 3$, and there are at least three odd numbers among the system $l_1, \ldots, l_n$. Then weakly coercive operators in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ exist for no $p \in [1,\infty]$.*

Theorem 7 yields

Proposition 5. Let $l_1 = \cdots = l_n = l$, let a system $\{P_j(D)\}_1^N$ of form (2.1) be weakly coercive in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$, and let also $n \geq 2N+1$. If the mapping $P^l := (P_1^l, \ldots, P_N^l) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N}$ has a finite number of zeros on the unit sphere $\mathbb{S}^{n-1}$, then l is even.

In the following theorem we show that as distinguished from the homogeneous case $l_1 = ...l_n$, there exist weakly coercive in $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ but nonquasielliptic operators for any $n \geq 3$. Moreover, wide classes of weakly coercive in $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ but nonquasielliptic operators are specified. Thereby, this result shows the sharpness of Theorem 6 for a. e. $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$.

Theorem 8. *Suppose that $n \geq 2$, $l := (2km_1, \ldots, 2km_{n-1}, k)$; $k, m_1, \ldots, m_{n-1} \in \mathbb{N}$, and*

$$l_+ := (2(k+1)m_1, \ldots, 2(k+1)m_{n-1}, k+1).$$

Suppose also that $P(D) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha D^\alpha$ is an l - quasielliptic operator, and one of the following conditions holds:

(i) all coefficients of the operator $P(D)$ are real;

(ii) all coefficients of the operator $P(D)$ are real except the coefficient by D_n^k.

Then the operator

$$R(D) := P(D) \sum_{j=1}^{n-1} D_j^{2m_j} + bD_n^k$$

is weakly coercive in $W_\infty^{l_+}(\mathbb{R}^n)$ at $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in the first case and at $b \in \mathbb{R}$ in the second.

The proofs of Theorems 5 and 8 are based on a result from [2] on multipliers in L_1.

Remark 13. If $n = 2$, then Theorem 8 coincides with the "half"of Proposition 2 from [11].

References

[1] *Agranovich M.S.* On Partial Differential Equations with Constant Coefficients. Uspekhi Math. Nauk. Vol.16. No.2. 1961. 27-93.

[2] *Belinsky E.S., Dvejrin M.Z., Malamud M.M.* Multipliers in L_1 and Estimares for Systems of Differential Operators. Russian Journal of Mathematical Physics. Vol.12. No.1. 2005. 6-16.

[3] *Berezanskii Yu.M.* Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators. Kiev, Naukova Dumka, 1965; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[4] *Besov O.V.* On Coercivity in Nonisotropic Sobolev Spaces. Math. Sb. V.73 (115). 1967. 585-599. English transl. in Math. USSR Sb. V.2. 1967.

[5] *Besov O.V., Il'in V.P., and Nikol'skii S.M.* Integral Representations of Functions and Embedding Theorems. M., Nauka, 1996. (Russian)

[6] *Volevich L.R.* Local Properties of Solutions of Quasielliptic Systems. Math. Sb. V.59 (101), 1962. 3-52 (Russian).

[7] *Volevich L.R., Gindikin S.G.* Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations. M., Editorial URSS, 2002. - 312 p. (Russian)

[8] *Dieudonne J.* Foundations of Modern Analysis. M. Mir, 1964. - 431 p. (Russian)

[9] *De Leeuw K., Mirkil H.* A Priori Estimates for Differential Operators in L_∞ Norm. Illinois J. Math. 1964. V.8. P. 112-124.

[10] *Littman W., McCarthy C., Riviere N.* The Non-Existence of L^p Estimates for Certain Translation-Invariant Operators. Studia Math. 1968. V.30. P.218-229.

[11] *Limanskii D.V., Malamud M.M.* Weak Coercivity of Systems of Differential Operators in L^1 and L^∞. Doklady Akademii Nauk. 2004. V.397. No 4. 453-458. (Russian)

[12] *Lions J.-L., Madgenes E.* Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications. V.1 M. Mir. 1971. 372 p. (Russian)

[13] *Lopatinskii Ya.B.* On One Method of Reduction of Boundary Problems to Elliptic Type Systems of Differential Equations to Regular Integral Equations. Ukr. Mat. Zhurnal. Vol.5. 1953. 123-151.

[14] *Malamud M.M.* Estimates for Systems of Minimal and Maximal Differential Operators in $L_p(\Omega)$. Trans. Moscow Math. Soc. V.56. 1995. 206-261.

[15] *Nirenberg L.* Lectures on Nonlinear Functional Analysis. M. Mir. 1977. 232 p. (Russian)

[16] *Ornstein D.* A Non-Equality for Differential Operators in the L_1 Norm. Arch. Rational Mech. Anal. V.11. 1962, 40–49.

[17] *Spenyer E.* Algebraic Topology. M. Mir. 1971. 680 p. (Russian)

[18] *Triebel H.* Theory of Functional Spaces. M. Mir. 1986. 447 p. (Russian)

TO THE REALIZATION OF SYSTEMS WITH DELAY

Vladimir M. Marchenko and Jean-Jacques Loiseau

† Bialystok Technical University, Bialystok, Poland; Belarussian State Technological University,220630,Minsk, Belarus; Fax: (017)2276217, e-mail: vmar@bstu.unibel.by;

‡ Institutute de Recherche en Cybernetique de Nantes, 4MR CNRS 6597 1Rue de la Noe, B.P.92101, F-44321 Nantes Cedex 03, France, e-mail: Jean-Jacques.Loiseau@irccyn.ec-nantes.fr

Abstract. We deal with the problem of realization of transfer matrix functions in a scale of time delay systems. Conditions for the realizability are obtained for several classes of systems with after-effect. Properties of minimal realizations with relation to the problems of controllability and observability are studied. A lot of attention is devoted to the simplest retarded type system. For such a case, an effective algorithm for constructing a realization of the simplest system class is proposed by using the well-known first level 2-D system realizations. A necessary and sufficient condition for a realization to be minimal is given for the one-input and one-output several delay realization case. The results obtained are discussed.

1. Introduction. The history of the problem of dynamical system realization began with papers [1,2], that dealt with ordinary linear stationary systems. Later on, the problem was thoroughly investigated and generalized to several classes of dynamical systems such as systems over an arbitrary field, systems over rings [3-6], 2-D systems [6-8] and others. The corresponding results can be found in the book [6] dedicated to the 60-th anniversary of R.E.Kalman.

Systems with time delay, from the point of view of the realization theory, were considered by Kamen and Sontag (see also [6]) as a particular case of systems over ring and in [8] as a special case of 2-D systems. A special attention to the problem of realization of time delay systems was paid in [9-13].

In this paper, an expanded version of [13], we combine above approaches with the ones proposed in [13] in order to study the problem of realizability of transfer functions in a realization scale consisting of several classes of systems with after-effect. The main questions under consideration are the following: 1) conditions under which a transfer function can be realizable in a chosen class, 2) constructing a realization from the chosen class, 3) description of minimal realizations. In the theory of realization over field one of the basic concepts is a notion of a canonical realization. This notion as well as ones of minimal realization are open if we consider the scale realization case.

2. Preliminaries. Following [7,8], let us introduce some notation:

$\mathbb{R}[s,\omega]$ denotes the set of polynomials in variables s and ω with real coefficients, $\mathbb{R}[s,1]=\mathbb{R}[s]$;

$\mathbb{R}(s,\omega)$ denotes the set of rational functions in s and ω, $\mathbb{R}(s,1)=\mathbb{R}(s)$;

$\mathbb{R}^{m\times r}[s,\omega]$ denotes the set of $m\times r$ matrices with entries in $\mathbb{R}[s,\omega]$, $\mathbb{R}^{m\times r}[s,1]=\mathbb{R}^{m\times r}[s]$;

$\mathbb{R}^{m\times r}(s,\omega)$ denotes the set of $m\times r$ matrices with entries in $\mathbb{R}(s,\omega)$, $\mathbb{R}^{m\times r}(s,1)=\mathbb{R}^{m\times r}(s)$.

The elements of $\mathbb{R}[s,\omega]$ can also be considered as polynomial in s with coefficients in $\mathbb{R}[\omega]$, i.e. $\mathbb{R}[s,\omega]=\mathbb{R}[\omega][s]$. Similarly, we have $\mathbb{R}[s,\omega]=\mathbb{R}[s][\omega]$, $\mathbb{R}^{m\times r}[\omega][s]=\mathbb{R}^{m\times r}[s,\omega]=\mathbb{R}^{m\times r}[s][\omega]$, $\mathbb{R}^{m\times r}(\omega)(s)=\mathbb{R}^{m\times r}(s,\omega)=\mathbb{R}^{m\times r}(s)(\omega)$.

Consider a dynamical system that can be modelled by $m\times r$ proper transfer matrix function

$$T(s,\omega)=\frac{N(s,\omega)}{a(s,\omega)}=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{s^i\omega^j}\,T_{ij} \tag{0.1}$$

where $T(s,\omega)\in\mathbb{R}^{m\times r}(s,\omega)$, $a(s,\omega)\in\mathbb{R}[s,\omega]$, $N(s,\omega)\in\mathbb{R}^{m\times r}[s,\omega]$, $a(s,\omega)=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k}a_{ij}s^i\omega^j$.

Retarded and neutral delay systems are examples of such dynamical systems.

The properness of T means that T is proper in s, i.e. $\deg_s a(s,\omega)\ge\deg_s N(s,\omega)$, and proper in ω, i.e. $\deg_\omega a(s,\omega)\ge\deg_\omega N(s,\omega)$, and the leading coefficient a_{nk} is not zero. Transfer function T is strictly proper if "not less"is replaced by "greater"in the above definition.

Considering $T(s,\omega)\in\mathbb{R}^{m\times r}(s,\omega)$, it is always possible to find [7,8] two kinds of 2-D realizations of such a transfer function:

$$\begin{cases} sx=\widetilde{A}(\omega)x+\widetilde{B}(\omega)u\\ y=\widetilde{C}(\omega)x+\widetilde{D}(\omega)u\end{cases} \tag{0.2}$$

$$\begin{cases} \omega z = \overline{A}(s)z + \overline{B}(s)u \\ y = \overline{C}(s)z + \overline{D}(s)u \end{cases} \tag{0.3}$$

where

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}(\omega) & \widetilde{B}(\omega) \\ \widetilde{C}(\omega) & \widetilde{D}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 \\ C_2 \end{bmatrix} (wI_q - A_4)^{-1}[A_3 \quad B_2] \tag{0.4}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{A}(s) & \overline{B}(s) \\ \overline{C}(s) & \overline{D}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_4 & B_2 \\ C_2 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_3 \\ C_1 \end{bmatrix} [sI_n - A_1]^{-1}[A_2 \quad B_1] \tag{0.5}$$

One can combine the latter one as a composite (hybrid) system

$$\begin{cases} sx = A_1x + A_2z + B_1u \\ \omega z = A_3x + A_4z + B_2u \\ y = C_1x + C_2z + Du \end{cases} \tag{0.6}$$

Proposition 2.1. *The following are equivalent:*

(i) There exists a realization of $T(s,\omega)$ *in the form (2), with* $\widetilde{A}(\omega), \widetilde{B}(\omega), \widetilde{C}(\omega)$, *and* $\widetilde{D}(\omega)$ *polynomial in* ω^{-1}, *and having degree 1;*

(ii) There exists a realization (6) with $A_4 = 0$;

(iii) There exists a realization (3) with $\overline{A}(s)$ *strictly proper.*

Also notice that, under these conditions, one has

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}(w) & \widetilde{B}(w) \\ \widetilde{C}(w) & \widetilde{D}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + w^{-1}A_2A_3 & B_1 + w^{-1}A_2B_2 \\ C_1 + w^{-1}C_2A_3 & D + w^{-1}C_2B_2 \end{bmatrix}$$

and, similarly, we have

Proposition 2.2. *The following are equivalent:*

(i) there exists a realization of $T(s,\omega)$ *with constant matrices* $\widetilde{B}(\omega)$ *and* $\widetilde{C}(\omega)$, $\widetilde{D}(\omega) = 0$, *and* $\widetilde{A}(\omega) = A + \omega^{-1}A_0$;

(ii) There exists a realization of form (2) with
$D = 0$, $C_2 = 0$, $B_2 = 0$, *and* $A_4 = 0$;

(iii) There exists a realization of form (3) with
$\overline{A}(s)$, $\overline{B}(s)$, $\overline{C}(s)$, *and* $\overline{D}(s)$ *being strictly proper.*

Remark 2.1. Observe that statement (iii) in Proposition 2.2 means that $T(s,\omega) = \overline{D}(s) + \overline{C}(s)(\omega I_q - \overline{A}(s))^{-1}\overline{B}(s)$ for some strictly proper matrices $\overline{A}(s)$, $\overline{B}(s)$, $\overline{C}(s)$, $\overline{D}(s)$. It follows from here that $sT(s,s^{-1}\omega) = s\overline{D}(s) + s\overline{C}(s)(\omega I_q - s\overline{A}(s))^{-1}s\overline{B}(s)$. Hence the transfer function $sT(s,s^{-1}\omega)$ is realizable in the form (3).

3. Realization scale. For a given transfer function $T(s,e^{sh}) \in \mathbb{R}^{m\times r}(s,e^{sh})$, we are looking for a realization in some scale of realizations starting with the simplest kind of time delay systems of retarded type and ending with general neutral type systems with after-effect. The initial data for every class of systems are assumed to be zero.

The scale under consideration is the following:

the simplest time delay system (SDS)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad t > 0; \tag{0.7}$$

systems with several delays in state, input and control (SSD)

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} \left(A_jx(t-jh) + B_ju(t-jh)\right), \quad y(t) = \sum_{j=0}^{l} C_jx(t-jh); \tag{0.8}$$

the simplest neutral type time delay system (SNDS)

$$\frac{d}{dt}(x(t) + Gx(t-h)) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad t > 0; \tag{0.9}$$

neutral type systems with several state-input-output delays (NSSD)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\sum_{j=0}^{l} G_j x(t-jh) = \sum_{j=0}^{l}\left(A_j x(t-jh) + B_j u(t-jh)\right), \quad G_0 = I_n,\\
&y(t) = \sum_{j=0}^{l} C_j x(t-jh), \quad t>0;
\end{aligned} \tag{0.10}$$

general neutral type distributed delay system (NDDS)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\int_{-\theta}^{0} dG(s)\,x(t+s) = \int_{-\theta}^{0} dA(s)\,x(t+s) + \int_{-\theta}^{0} dB(s)\,x(t+s),\\
&y(t) = \int_{-\theta}^{0} dC(s)\,x(t+s)
\end{aligned} \tag{0.11}$$

where $A,\ G \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $A_j,\ G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $B_j \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $C_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $j = 0,1,...,l$; $0 < h$ is a constant delay; $\theta = kh$ for some natural $k \in N$; $G(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $A(s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $B(s) \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $C(s) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $s \in [-\theta, 0]$; the entries of matrices $G(\cdot)$, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ and $C(\cdot)$ are functions of bounded variation in $[-\theta, 0]$; I_n is the $n\times n$ identity matrix.

We mark classes (7)-(11) as (7)'-(11)' if the corresponding output is completed with an additional control term in the form $Du(t)$, $\sum_{j=0}^{l} D_j u(t-jh)$, $Du(t)$, $\sum_{j=0}^{l} D_j u(t-jh)$, and $\int_{-\theta}^{0} dD(s)u(t+s)$ respectively.

4. Transformation scale. In the case of systems over fields it is well-known [6] that all the minimal realizations of the same transfer function are necessarily isomorphic. For the time delay systems the problem of classification of minimal realizations as well as a notion of minimality of realizations for the general NDDS class is more complicated.

Depending on control and observation problems under investigation, various kinds of functional transformations are of interest to classify systems:

$\Re_0 : x(t) = D\text{æ}(t)$, $\text{æ}(t) = D^{-1}x(t)$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $detD \neq 0$;
$\Re_1 : x(t) = D(exp(-ph))\text{æ}(t)$, $\text{æ}(t) = D^{-1}(exp(-ph))x(t)$, $exp(-ph)z(t) = z(t-h)$, $D(m) \in \mathbb{R}^{n\times n}[m]$, $detD(m) \not\equiv 0$; $m \in \mathbb{R}$;
$\Re_2$: transformations of class $\Re_1$ with $detD(m) \equiv cm^k, m \in \mathbb{R}$, where $c \neq 0$, $k \geq 0$;
$\Re_3$: transformations of class $\Re_1$ with $detD(0) \neq 0$;
$\Re_4$: transformations of $\Re_1$ with $detD(m) \equiv const \neq 0$ for $m \in \mathbb{R}$;
$\Re_5 : x(t) = D(exp(-ph))\text{æ}(t)$, $\text{æ}(t) = D^{-1}(exp(-ph))x(t)$; $D(m) \in \mathbb{R}^{n\times n}(m)$ with $detD(m) \neq 0$ for $m \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$, $mes\mathbb{D} = 0$
$\Re_6 : x(t) = \int_{-\nu}^{0} dD(\tau)\text{æ}(t+\tau)$, $\text{æ}(t) = \int_{-\nu}^{0} dP(\tau)x(t+\tau)$ with $\nu > 0$ and $\int_{-\nu}^{0} e^{s\tau}dD(\tau)\cdot \int_{-\nu}^{0} e^{s\tau}dP(\tau) \equiv I_n$ for $s \in \mathbb{C}$; etc. (here $\mathbb{C}$ is the field of complex number).

5. Scale realization. The first question under our consideration is to investigate the problem of realization in the simplest scale case.

Definition 5.1. A transfer matrix function $T(s, e^{sh}) \in \mathbb{R}^{m\times r}(s, e^{sh})$ is said to be *realizable* in the SDS class if there exist matrices $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, and $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ such that $T(s, e^{sh}) \equiv C(sI_n - A - e^{-sh}A_1)^{-1}B$ for $Re\, s > \alpha$ where α is a sufficiently large real number.

In this case the quadruple (C, A, A_1, B) or the corresponding system (7) is called a realization of the transfer matrix function $T(s, e^{sh})$.

Analogously, one defines the realizability of and the realization for transfer function $T(s, e^{sh})$ in the classes (7)', (8)-(11), (8)'-(11)' of delay systems.

PROPOSITION 5.1. *A transfer function $T(s,e^{sh}) \in \mathbb{R}^{m\times r}(s,e^{sh})$ is realizable in the SDS class if and only if its series repsentation (1) is triangular, i.e.*

$$T(s,e^{sh}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{s^{k+1}} e^{-sjh} Y_{k,j} \tag{0.12}$$

and there exist matrices $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, and $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ such that

$$Y_{k,j} = CX_{k+1}(jh)B \quad for \quad j = 0,1,... \quad and \quad k = 0,1,...$$

where $X_k(jh)$ for $j = 0,1,...$ and $k = 0,1,...$ is a solution of the determining equation

$$X_k(t) = AX_{k-1}(t) + A_1X_{k-1}(t-h) + U_{k-1}(t) \quad for \quad t \geq 0, \quad k = 0,1,... \tag{0.13}$$

with initial conditions

$$U_0(0) = I_n \quad ,U_k(t) = 0 \quad if \quad k^2 + t^2 \neq 0 \qquad and \quad X_k(t) = 0 \quad if \quad k < 0 \quad or \quad t < 0. \tag{0.14}$$

The proof of the proposition is based on the following

LEMMA 5.1 (see [14]). *For the solution of the determining equation the following identity is valid:*

$$(A + e^{-sh}A_1)^k \equiv \sum_{j=0}^{k} e^{-shj} X_{k+1}(jh), \quad s \in \mathbb{C}, \quad k = 0,1,...$$

A transfer matrix function $T(s,e^{sh})$ is called *rational* if its elements are rational functions in s and e^{sh}.

PROPOSITION 5.2. *A transfer matrix function $T(s,e^{sh}) \in \mathbb{R}^{m\times r}(s,e^{sh})$ is realizable in the SDS class if and only if it admits a triangular representations and it is rational with respect to s and e^{sh}.*

DEFINITION 5.2. A transfer series (12) is called *recurrent* if there exist real numbers r_{ij} where $j = 0,1,...,i$ and $i = 0,1,...,n$ such that

$$Y_{n+k,\nu} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} r_{ij} Y_{n+k-i,\nu-j} \tag{0.15}$$

for $k = 0,1,...$ and $\nu = 0,1,...$, and for some natural number n, where $Y_{k,j} = 0$ for $j < 0$.

PROPOSITION 5.3.*A transfer matrix function (12) is realizable in the SDS class if and only if it is recurrent.*

The proof of the proposition is based on the following

LEMMA 5.2.(see [14]). *The solution $X_k(t)$, $t \geq 0, k = 0,1...$ of the determining equation (13), (14) satisfies the following "characteristic"equation:*

$$X_{n+k+1}(t) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} \tilde{r}_{ij} X_{n+k+1-i}(t-jh) \quad for \quad t \geq 0 \quad and \quad k = 0,1,...$$

where $\tilde{r}_{ij}$ for $j = 0,1,...,i$ and $i = 1,..,n$ are the coefficients of the characteristic equation

$$0 = \det(\lambda I_n - A - e^{-\lambda h}A_1) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i} \tilde{r}_{ij} \lambda^{n-i} e^{-\lambda jh}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Remark 5.1. Proposition 5.3 gives a condition for the SDS class realizability in terms of power series representation of a transfer matrix function that is a generalization of the well-known statement of R.E.Kalman to triangular power series.

As a corollary of Propositions 5.1-5.3 we have

THEOREM 5.1.*The following statements are equivalent:*

(i) transfer matrix function $T(s,e^{sh})$ is realizable in the SDS class,

(ii) transfer matrix function $T(s,e^{sh})$ is rational and admits a triangular representation (12),

(iii) transfer matrix function $T(s,e^{-sh})$ admits a triangular representation and satisfies the recurrence condition.

Summarizing the results presented, we propose the following algorithm for computing a SDS realization in case it exists.

ALGORITHM:

1. Considering a transfer $T\left(s, e^{sh}\right)$ and setting $e^{sh} = s^{-1}m$, check whether or not transfer $sT\left(s, s^{-1}m\right)$ is proper.

2. If, indeed, the transfer $sT\left(s^{-1}m\right)$ is proper [7,8], then it can be regarded as a matrix function in m with coefficients that are proper in the variable s. Then, analogously to [7,8], we obtain the following realization of the first level:

$sT\left(s, s^{-1}m\right) = D(s) + C(s)\left(mI_q - A(s)\right)^{-1} B(s)$

where $D(s)$, $C(s)$, $A(s)$, and $B(s)$ are proper in s.

3. Define

$\bar{D}(s) = \frac{1}{s}D(s)$, $\bar{C}(s) = \frac{1}{s}C(s)$,

$\bar{A}(s) = \frac{1}{s}A(s)$, $\bar{B}(s) = \frac{1}{s}B(s)$.

4. Calculate matrices A_3, C_1, A_1, A_2, and B_1 of the second level realization [7,8] realizing the transfer:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}(s) & \vdots & \bar{B}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{C}(s) & \vdots & \bar{D}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 \\ C_1 \end{bmatrix} (sI_n - A_1)^{-1} \begin{bmatrix} A_2 & B_1 \end{bmatrix}$$

.

5. Then, the system

$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 A_3 x(t-h) + B_1 u(t)$

$y(t) = C_1 x(t)$

is a SDS realization of the transfer $T\left(s, e^{sh}\right)$.

Remark 5.2. The realization problem for the transfer matrix function (12) in the SSD class can be investigated by methods of the theory of realization of systems over rings [3-6].

It would suffice to consider (8) as a system of the form

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j e^{-pjh} x(t) + \sum_{j=0}^{l} B_j e^{-pjh} u(t), \quad y(t) = \sum_{j=0}^{l} C_j e^{-pjh} x(t)$$

defined over the ring of shift polynomials in e^{-ph} where $e^{-pjh}x(t) = x(t-jh)$, $e^{-pjh}u(t) = u(t-jh)$ for $j = 0, 1, ...$

Then we can state.

The following properties are equivalent:

(i) The transfer (12) is realizable in the SSD class,

(ii) The entries of (12) are strictly proper rational functions (with coefficients in $\mathbb{R}[e^{-sh}]$),

(iii) The transfer (12) is recurrent in the realization theory over field sense,

(iv) The Hankel matrix (in the realization theory over field sense) has a finite rank.

In order to obtain a minimal realization of such a class one can use the realization over ring theory algorithms (see, for example, [3-6]).

6. Controllability, observability, minimality.

DEFINITION 6.1. System (7) is said ([15]) to be:

a) *relatively* (or $\mathbb{R}^n-$) controllable if for any $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $x_1 \in \mathbb{R}^n$ and for any picewise continuous in the interval $[-h, 0]$ n-vector function $\varphi(\cdot)$ there exists a time instant t_1 and a picewise continuous r-vector function $u(\cdot)$ such that the corresponding solution of the system satisfies the following conditions

$$x(+0) = x_0,\ x(\tau) = \varphi(\tau),\ \tau \in [-h, 0] \quad (0.16)$$

$$x(t_1) = x_1; \quad (0.17)$$

b) *pointwisely* (multipoint) controllable if for any initial conditions (16), given natural number $\gamma+1$, real numbers $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_\gamma$ where $0 = \beta_0 < ... < \beta_\gamma$, and n-vectors $c_0, c_1, ..., c_\gamma$ there exist a time instant $t_1 > \beta_\gamma$, and piecewise continuous control function $u(\cdot)$ such that the corresponding solution of the system satisfies the following conditions

$$x(t_1-\beta_j)=c_j \quad for \quad j=0,1,...,\gamma\,;$$

c) *modally* controllable (coefficient assignable) if for any real numbers r_{ij}, $j=0,1,...,i$ and $i=0,1,...,n$ with $r_{00}=1$ there exist a linear feedback of the form

$$u(t)=\sum_{j=0}^{\theta} Q_j x(t-jh)$$

such that $\det\left[\lambda I_n - A - e^{-\lambda h}A_1 - B\sum_{j=0}^{\theta} Q_j e^{-\lambda jh}\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} r_{ij}\lambda^{n-i}e^{-\lambda jh}.$

Dual notions of $\mathbb{R}^n$-observability and pointwise observability can be found in [15].

PROPOSITION 6.1 [15]. *System (7) is relatively controllable if and only if the following rank condition holds:*

$$rank[X_k(jh)B,\ j=0,1,...,k-1;\ k=1,2,...,n]=n$$

where $X_k(jh), j=0,1,...; k=0,1,...$ is the solution of the determining equation(13), (14). System

$$\dot{x}(t)=A^*x(t)+A_1^*x(t-h),\ y(t)=C^*x(t) \tag{0.18}$$

is $\mathbb{R}^n$-observable if and only if the dual system (7) with matrices

$$A=(A^*)^T,\ A_1=(A_1^*)^T,\ B=(C^*)^T \tag{0.19}$$

(with $()^T$ denoting the transpose) is relatively controllable.

PROPOSITION 6.2 [15]. *System (7) is pointwisely controllable if and only if the following one-parameter system with no delay*

$$\dot{x}(t)=(A+mA_1)x(t)+Bu(t)$$

is controllable in Kalman sense for some real number m, i.e.

$$rank[B,(A+mA_1)B,(A+mA_1)^2B,...,(A+mA_1)^{n-1}B]=n, \quad \exists m\in\mathbb{R}. \tag{0.20}$$

System (18) is pointwisely observable if and only if the dual system (7), (19) is pointwisely controllable.

Remark 6.1. Proposition 6.2 answers the question of Kamen [4, p.34] about "one of the various notions of functions reachability... that is equivalent to the condition (20)".

PROPOSITION 6.3 [15]. *System (7) with $B=b\in\mathbb{R}^n$ is modally controllable if and only if the condition is valid:*

$$\det[b,(A+mA_1)b,(A+mA_1)^2b,...,(A+mA_1)^{n-1}b]\equiv const\neq 0, \quad m\in\mathbb{R}.$$

Remark 6.2. It is clear that "modal controllability"$\Rightarrow$ "pointwise controllability"$\Rightarrow$ "relative controllability". The reverse implications are not valid in general as examples show.

DEFINITION 6.2. A simple realization is said to be *minimal* if its dimension n is minimal among all possible realizations of a given scale class.

PROPOSITION 6.4. *If the simplest realization (7) is minimal in the SDS case then it is relatively controllable and $\mathbb{R}^n$-observable.*

Remark 6.3. Proposition 6.4 can be generalized to concentrated delay classes by using the results of paper [15].

PROPOSITION 6.5. *If a realization (7)(or (8)) is pointwisely controllable and pointwisely observable then it is minimal in the SSD case.*

Proof. It directly follows from results over fields.

Now we need the following

LEMMA 6.1. *Let $g(m)$ and $A(m)$ be n-vector and a matrix respectively with polynomial in m entries, $g(m)\not\equiv 0$, $g(m)\in\mathbb{R}^{n\times 1}[m]$, $A(m)\in\mathbb{R}^{n\times n}[m]$, and, additionally,*

(i) $rank\,G(m) = rank\,[g_1(m),\ \dots,\ g_k(m)] = k$ for some $m\in\mathbb{R}$ where $g_j(m)=(A(m))^{j-1}g(m)$ for $j=1,\ \dots,\ k$;

(ii) $g_{k+1}(m)=A^k(m)g(m)=\alpha_1(m)g_1(m)+\ldots+\alpha_k(m)g_k(m)$ where $\alpha_j(m)\in\mathbb{R}$ for all $m\in\mathbb{R}$ and $j=1,\ \dots,\ k$.

Then the coefficients $\alpha_1(m)$, ..., $\alpha_k(m)$ can be taken as polynomials.

Proposition 6.6. *A single-input and single-output realization (8) is minimal in SSD class if and only if it is pointwisely controllable and pointwisely observable.*

Remark 6.4. A minimal single-input and single-output SSD realization can be chosen in such a way that the corresponding system of control (i.e. pair $(A(m),\ b(m)\ ))$ is modally controllable and the corresponding system of observation (i.e. pair$(C(m),A(m)))$ is pointwisely observable and vice versa (see also [4,5]). Note that the property of modal controllability (and the corresponding one for the observability) is still not necessary for SSD realization to be minimal.

Definition 6.3. A realization is said to be *strongly minimal* if it is of the simplest SDS class and if it is minimal in the SSD realization class.

It follows from the propositions 6.4,6.5 that

Proposition 6.7. *An one-input and one-output realization is strongly minimal if and only if it is a SDS realization which is pointwisely controllable and pointwisely observable.*

Proposition 6.8. *A SDS realization of dimension 2 is minimal in the SDS class if and only if it is minimal in the SSD class.*

7. Examples. In this section, we consider several examples to illustrate our ideas and methods. We start with an example of transfer function which has no canonical realization in sense of Pandolfi [11].

Example 1. Consider the transfer function $T\left(s,e^{-s}\right)=\frac{1-e^{-s}}{s}$.

There is no the simplest realization (7) for such a transfer function that follows from Proposition 5.2. Nevertheless, we have two realizations in scale:

$(i)\ \ \dot{x}\left(t\right)=u\left(t\right)-u\left(t-1\right),\ y\left(t\right)=x\left(t\right)$

and

$(ii)\ \ x\left(t\right)=\int\limits_{-1}^{0}u\left(t+\tau\right)d\tau,\ y\left(t\right)=x\left(t\right).$

Example 2. A transfer function under consideration is the following one $T\left(s,e^{-s}\right)=\frac{e^{-s}}{s^2}$.

The condition of Proposition 5.2 holds and there exists a realization of the simplest form, for example, the following one

$$(i)\ \ \dot{x}\left(t\right)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}x\left(t\right)+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}x\left(t-1\right)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\left(t\right),\ y\left(t\right)=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}x\left(t\right).$$

This realization is pointwisely controllable but it is not $\mathbb{R}^n$-observable and therefore it is not poinwisely observable. Then by Proposition 6.6, the dimension of (i) in the SSD class can be reduced.

By applying a $\Re_2$-transformation with

$$D\left(m\right)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&m\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\quad\text{we obtain}$$

$$(ii)\ \ \dot{æ}\left(t\right)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}æ\left(t\right)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\left(t-1\right),\ y\left(t\right)=[1,0]\,æ\left(t\right).$$

Realization (ii) is pointwisely controllable and pointwisely observable. Hence it is minimal in the SSD class. The question arises if there exists a realization of dimension 2 in the simplest time delay case. The answer is positive as the following example shows

$$(iii)\ \ \dot{x}\left(t\right)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x\left(t-1\right)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\left(t\right),\ y\left(t\right)=[1\ \ 0]\,x\left(t\right)$$

and what is more, all the minimal SDS realizations with $b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ are the following ones:

$$(iv)\ \ \dot{x}\left(t\right)=\begin{bmatrix}a_{11}^1&a_{12}^1\\a_{21}^1&-a_{22}^1\end{bmatrix}x\left(t-1\right)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\left(t\right),\quad y\left(t\right)=\begin{bmatrix}c_1&0\end{bmatrix}x\left(t\right)$$

where $c_1a_{12}^1=1$ and $a_{12}^1a_{21}^1+\left(a_{11}^1\right)^2=0$.

It follows from (iv) that there is a $\Re_0-$ transformation (we say the $\mathbb{R}^n-$ isomorphism or the $\Re_0$-isomorphism among SDS realizations) that connects any pair of minimal SDS realizations for our transfer function.

Other examples can be given to illustrate the above results and algorithm.

8. Discussion.

Examples show that the question of the minimal dimension of realizations, of canonical realizations in the scale, especially for distributed delay scale classes, is extremely complicated to be solved in the framework of the space $\mathbb{R}^n$ (it seems in the framework of fields and rings theory) without using an infinite dimension structure of systems with after-effect.

The question is if the properties of relative controllability and $\mathbb{R}^n$-observability are sufficient for the minimality of the SDS class realizations.

The next observation is that when we are looking for an isomorphism among minimal realizations we should take into account what system properties under investigation ought to be preserved. Then we can choose an appropriate transformation $\Re_i$ for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ from the transformation scale.

Examples show that not every realization which is minimal in the SDS class is strongly minimal. There is no difference, as we see from Proposition 6.7, 6.8 for realizations of dimension 2. But for realizations of dimension $n \geq 3$ these notions are not equivalent in general as the following example

$$T\left(s, e^s\right) = \frac{s}{s^2 - 1 - e^{-s} - e^{-2s}}$$

shows and there exists a minimal in the SSD class realization of dimension 2 as follows from results over ring but it is not difficult to directly check that there is no a 2-dimensional SDS realization for such a transfer if coefficients of the realization are chosen from the field $\mathbb{R}$ of real numbers. If coefficients are taken from the field $\mathbb{C}$ of complex numbers then a SDS realization of dimension 2 exists. The result is based on the property that polynomial $1 + d + d^2$ is irreducible over $\mathbb{R}$ but such an irredicibility property is not essential in general.

Concluding note that all the minimal SDS realizations of transfer $T\left(s, e^s\right) = \frac{s}{s^2-1-e^{-2s}}$ under assumptions that b is taken as $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (and with coefficients in $\mathbb{R}$) are determined as follows

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A\left(e^{-s}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + e^{-s}\left(1 - a_{13}\right) & a_{13} + e^{-s} \\ 1 & 0 & 0 \\ e^{-s} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

with invariant factors (over $\mathbb{R}$) $1,\ 1,\ s^2 - 1 - d - d^2$ (were $d = e^{-s}$).

Then it follows that there is no an isomorphism even in the $\Re_1$ transformation class. That is why the problem of classification of the minimal realization for each scale class seems actual even considering finite (of infinite) set of classes of minimal realizations such as the minimal realizations of each class are unique within to some isomorphism depending on the class.

Problem 8.1. Find algorithms for computing minimal realizations for each class of the realization scale.

Let us turn to Theorem 5.1. In the theory of realization over field, along with the equivalences (i)-(iii), a theorem stating that the Hankel matrix has a finite rank is well-known.

Problem 8.2. For the scale realization case, the question is wether there exists a Hankel matrix generalization playing in such a case the same role as in the theory of realization over fields.

References

[1] E.G. Gilbert, Controllability and observability in multivariable control systems, SIAM J. Control, 1 (1963), pp. 128-151.

[2] R.E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, SIAM J. Control, 1 (1963), pp. 152-192.

[3] Y. Rouchaleau, B.F. Wyman and R.E. Kalman, Algebraic structure of linear dynamical systems. III. Realizaation theory over a commutative ring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 69 (1972), pp.3404-3406.

[4] E.W. Kamen, Lectures on algebraic system theory: Linear systems over rings, NASA Contractor Report 3016, 1978.

[5] E.D. Sontag, Linear systems over commutative rings: a survey, Richerche di Automatica, Vol. 7, No 1 (1976), pp. 1-34.

[6] Mathematical System Theory: The Influence of R.E.Kalman, A.C. Antoulas, ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.

[7] R. Eising, Realization and stabilization of 2-D systems, IEEE Trans. Automat.Control, AC-23, No 5 (1978), pp. 793-799.

[8] S.H. Zak, E.B. Lee and W.-S. Lu, Realizations of 2-D filters and time delay systems, IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-33, 12 (1986), pp. 1241-1244.

[9] A.S. Morse, Ring models for delay-differential systems, Automatica, 12 (1976), pp. 529-531.

[10] E.M. Cliff and J.A. Burns, Euclidean controllable realizations of linear hereditary systems, Math. Systems Theory, 12 (1978), pp. 133-149.

[11] V.M. Marchenko, To the theory of realization of linear stationary systems with several delays, Abstr. of V Republician Math. Conf., Grodno, Part 1, (1980), pp. 156 (in Russian).

[12] L. Pandolfi, Canonical realizations of systems with delays, SIAM J. Control Optim., Vol. 21 (1983), pp. 598-613.

[13] J.J. Loiseau and V.M. Marchenko, Scale realization of time delay systems, Doklady Akademii Nauk (Doklady Mathematics), 383, 3 (2002), pp. 1-4.

[14] V.M. Marchenko, A controllability criterion proof for retarted systems of neutral type, Vestnik Belorusskogo Universiteta, Ser.1, No 3 (1972), pp. 11-13 (in Russian).

[15] R. Gabasov, F.M. Kirilova, V.M. Marchenko and I.K. Asmykovich, Problems of control and observation for infinite-dimensional systems (a survey), Prepr. of the Institute of Mathematics of the Acad. of Sci. of Belarus , No 1 (186), Minsk, 1984 (in Russian).

SOLVING ABSTRACT STOCHASTIC EQUATIONS BASED ON SEMIGROUP TECHNIQUES

Melnikova I.V.[1] and Azanova O.Yu.[1]
Ural State University,
Ekaterinburg, Russia

The first order abstract Cauchy problem with an additive write noise and the generator of an R-semigroup is investigated in a Hilbert space H. A generalized solution in spaces of H-valued stochastic distributions and a weak solution to an integrated version of the problem with a Q-Wiener process are constructed. Main characteristics of solutions are obtained. Important properties of conjugate R-semigroups necessary for the investigation are proved.

1. Introduction

We study the abstract stochastic Cauchy problem

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B\mathbf{W}(t), \quad t \in [0,T], \quad X(0) = \xi, \tag{1.1}$$

where A and B are linear operators in a Hilbert space H, $\{\mathbf{W}(t)\}$ is an H-valued white noise process, and ξ an H-valued random variable. White noise analysis has been developed during the last decades by many authors (see e.g. [6], [5] and references therein).

Let us discuss what type of issues arises while solving abstract stochastic equations. The basic problems here are the white noise process nonsmothness that takes place even though finite dimensional spaces and definition of stochastic processes in infinite dimensional spaces. The Ito approach involves reducing the stochastic equations with a white noise in $\mathbb{R}^n$ to integrated ones with the Brownian motion process $\{\beta(t)\}$ which is continuous. Extension of $\{\beta(t)\}$ to the infinite dimensional case allowed to consider stochastic equations in Hilbert spaces with Q-Wiener process $\{W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i(t) e_i\}$:

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t)\ , \quad t \in [0,T],\ X(0) = \xi. \tag{1.2}$$

[2, 9]. Here $\{e_i\}$ is an orthonormal basis in H, $\{\beta_i(t)\}$ are independent Brownian motions, and λ_i are eigenvalues of operator Q, linear self–adjoint and trace–class. Da Prato and Zabczyk [2] constructed a weak solution to (1.2) with A being the generator of a class C_0 semigroup.

Nevertheless, a lot of important for applications operators A, especially differential operators $A = A(i\frac{d}{dx})$, do not generate semigroups of class C_0, but generate certain more general families of bounded operators associated to the homogeneous Cauchy problem. One of the most general among such families are R-semigroups. Besides, a lot of applied problems reduce to setting the Cauchy problem with a white noise process in the differential form (1.1), not in an integrated one.

In the present paper we prove some important properties of R-semigroups in Hilbert spaces. On the basis of these results we construct a weak solution to (1.2) with Q-Wiener process and A being the generator of an R-semigroup. Moreover, extending the approach of [5], where the theory of $\mathbb{R}^n$-valued stochastic distributions is presented, we construct a generalized solution to (1.1) with white noise process in spaces of H-valued stochastic distributions.

The paper is organized as follows. In the next second section we prove that under certain conditions the family conjugate to an R-semigroup is an R^*-semigroup. In the third section some necessary results from the theory of infinite dimensional stochastic processes are introduced and a solution to the integrated stochastic Cauchy problem (1.2) is obtained. The forth section is devoted to an introduction to the theory of abstract stochastic distributions [4, 9]. Distributions of singular white noise and Wiener processes, important for the Cauchy problem studying, are defined. In conclusion the setting of the stochastic Cauchy problem (1.1) in spaces of H-valued stochastic distributions and the existence theorem in the spaces are given.

[1]The work is partially supported by grant RFBR № 03-01-00310.

2. Some properies of R-semigroups in Hilbert spaces

As it was mentioned above for solving the stochastic Cauchy problem solutions of the associated homogeneous problem are applied. In the present paper for the investigation of the Cauchy problem with operator A not being the generator of a class C_0 semigroup we use more general families of bounded operators — R-semigroups. In contrast to C_0 class semigroups, an R-semigroup is not a family of solution operators for a homogeneous Cauchy problem, moreover an R-semigroup can be defined locally (i.e. not necessarily for all $t \in [0,\infty)$) and its generator may have no the resolvent.

Definitions of R-semigroups as generalization of class C_0 semigroups are given through a 'semigroup relation' [3] and through equations that the family satifies [7].

Definition 1. Let R be a linear invertible and with dense range operator in H. A family of linear bounded operators $\{S(t), t \in [0,\tau)\}, \tau \le \infty$, on H strongly continuous with respect to t and satisfying the conditions

(R1) $\quad S(t+s)R = S(t)S(s), \ \ s,t,s+t \in [0,\tau), \quad S(0) = R;$

is called *an R-semigroup*. The semigroup is *local* if $\tau < \infty$. G defined as

$$Gf := \lim_{t\to 0} \frac{S(t)R^{-1} - I}{t} f, \quad \operatorname{dom} G := \{f \in \operatorname{ran} R : \lim_{t\to 0} \frac{S(t)R^{-1} - I}{t} f \text{ exists}\}$$

is called the infinitesimal operator of an R-semigroup and $A := \overline{G}$ its *generator.*

In the case $R = I$ the characteristic property of an R-semigroup (R1) coincides with the semigroup property of solution operators $U(t)$: $U(t+s) = U(t)U(s)$ which can be extended to each $t, s \ge 0$. Thus I-semigroup is a semigroup of class C_0.

Definition 2. Let R be a linear invertible with dense range operator and A be closed densely defined in H, then a family of linear bounded operators $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$ strongly continuous with respect to t is called *an R-semigroup with generator A* if they satisfy the conditions

$$S(t)x - Rx = \int_0^t S(s)Ax\, ds, \quad AS(t)x = S(t)Ax, \quad t \in [0,\tau), \quad x \in \operatorname{dom} A. \tag{2.1}$$

These two definitions are not equivalent generally (definition 2 follows from definition 1) and the choice of one of them depends on the setting and aims of a problem studied. In the present paper we will use the definition 2. Due to the choice, we have managed to prove the result about the behaviour of conjugate semigroups necessary for the investigation of the stochastic problem.

Theorem 1. *Let A be the generator of an R-semigroup $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$ in H. Then the family $\{S^*(t), t \in [0,\tau)\}$ is an R^*-semigroup with generator A^*.*

Доказательство. Since an operator conjugate to a bounded one is bounded, then R^* and operators $S^*(t)$ for each t are bounded. Now in order to prove that the family of bounded operators $\{S^*(t),\, t \in [0,\tau)\}$ forms R^*-semigroup with generator A^*, we prove that 1) A^* is closed and densely defined, 2) R^* is invertible with densely range and 3) the family $\{S^*(t),\, t \in [0,\tau)\}$ is strongly continuous in t.

A^* is closed as any conjugate one. For a closed densely defined operator the domain of its conjugate one is also densely defined [1], that is $\overline{\operatorname{dom} A^*} = H$. The invertibility of R^* follows from the invertibility of R. Besides, for any bounded operator R the equality $(\ker R)^\perp = \overline{\operatorname{ran} R^*}$ holds, and since R is invertible, that is $\ker R = \{0\}$, we have $\overline{\operatorname{ran} R^*} = H$. The commutativity of operators $S^*(t)$, $t \in [0,\tau)$, with A^* on $\operatorname{dom} A^*$ follows from the commutativity of $S(t)$ with A.

To prove that the family $\{S^*(t),\, t \in [0,\tau)\}$ is strongly continuous and the equality

$$S(t)^*y - R^*y = \int_0^t S^*(s)A^*y\, ds, \quad y \in \operatorname{dom} A^*, \tag{2.2}$$

takes place, we multiply (2.1) with $y \in \operatorname{dom} A^*$ and due to continuity of the scalar product, we have

$$\langle S(t)x - Rx, y\rangle = \langle x, S(t)^*y - R^*y\rangle = \langle \int_0^t S(s)Ax\,ds, y\rangle = \int_0^t \langle AS(s)x, y\rangle ds = \int_0^t \langle S(s)x, A^*y\rangle ds. \quad (2.3)$$

These equalities may be continued to $x \in X = \overline{\operatorname{dom} A}$ and differentiated:

$$\frac{d}{dt}\langle x, S^*(t)y\rangle = \lim_{\Delta t \to 0}\langle x, \frac{S^*(t+\Delta t) - S^*(t)}{\Delta t} y\rangle = \langle x, S^*(s)A^*y\rangle, \quad x \in X. \quad (2.4)$$

Now we prove the strong continuity of $S^*(t)$ in $t \in [0, \tau)$ by contradiction: let for a point $t_0 \in [0, \tau)$ and $y_0 \in H$

$$\exists a > 0 : \forall \delta > 0,\ \exists \Delta t < \delta : \quad \|S^*(t_0 + \Delta t)y_0 - S^*(t_0)y_0\| > a. \quad (2.5)$$

Due to the density of $\operatorname{dom} A^*$, there exists $y_1 \in \operatorname{dom} A^*$ such that the inequality (2.5) also holds for an a_1. Then $F(\Delta t) := \|\frac{S^*(t_0+\Delta t)-S^*(t_0)}{\Delta t} y_1\|$ is unbounded as $\Delta t \to 0$, that contradicts to weak convergence (2.4).

To complete the proof we need to show (2.2). From (2.3) extended to $x \in X$ and the strong continuity of $S^*(s), s \in [0, \tau)$, we have

$$\langle x, S(t)^*y - R^*y\rangle = \int_0^t \langle x, A^*S^*(s)y\rangle = \langle x, \int_0^t S^*(s)A^*y\rangle, \quad x \in X,\ y \in \operatorname{dom} A^*. \quad (2.6)$$

It follows the equality (2.2). □

Some typical examples of R-semigroups, especially R-semigroups generated by differential operators are given in [10].

3. Constructing solutions to the integrated stochastic Cauchy problem

At the beginning, following to [2, 8], we introduce some necessary definitions and results from the theory of infinite dimensional stochastic processes.

Definition 3. Let $u \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$, then $E[u] := \int_\Omega u(\omega)\,P(d\omega)$ is *the mathematical expectation.* Let $u \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$, then

$$Cov[u]h := E[(u - E[u]) \otimes (u - E[u])h], \quad \text{where } (h_1 \otimes h_2)h := h_1\langle h_2, h\rangle, \quad h \in H,$$

is *the covariation operator.*

For any $u \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ the operator $Cov[u]$ is symmetric, nonnegative and of trace–class. Since $Cov[u]$ is a trace–class operator, it can not be equal to the unit one, hence an extension of the Brownian motion to the infinite dimensional case can not have the distribution law $\mathcal{N}(0, t)$, and instead of the Brownian motion a Q-Wiener process is introduced.

Definition 4. Let Q be a linear symmetric nonnegative trace–class operator in H, then H-valued stochastic process $W = \{W(t), t \geq 0\}$ is *a Q-Wiener process*, if

(W1) $W(0) = 0$ a.e.;
(W2) W has independent increments;
(W3) distribution law $\mathcal{L}_{[W(t)-W(s)]}$ is equal to $\mathcal{N}(0, (t-s)Q)$, $0 \leq s \leq t$;
(W4) W has continuous ways a.e.

Since existence of a strong solution needs A to be bounded (moreover, a Hilbert-Schmidt operator) even in the case of a class C_0 semigroup [2], we will construct a weak solution to the Cauchy problem considered.

Definition 5. An H-valued process $X(t), t \in [0, T]$, is *a weak solution* to (1.2), if

(a) $\int_0^T \|X(t)\|_H\,dt < \infty$ a.e.;
(b) for each $y \in \operatorname{dom}(A^*)$, $t \in [0, T]$, the equation holds a.e.:

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \xi, y\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*y\rangle ds + \langle BW(t), y\rangle. \quad (3.1)$$

Now we show that a weak solution to (3.1) is given by sum of $S(t)R^{-1}\xi, t \in [0,T]$, the solution of the homogeneous Cauchy problem with the generator of an R-semigroup and an integral of the special form called *the stochastic convolution*: $W_A(t) := \int_0^t S(t-s)R^{-1}BdW(s),\ t \in [0,T]$.

Theorem 2. *Let A be the generator of an R-semigroup $\{S(t), t \in [0,\tau)\}$, $\tau > T$, such that $\overline{\operatorname{dom} A} = H$, $\overline{ranR} = H$, $R^{-1}B \in L(H)$, $\{S(t)R^{-1}B, t \in [0,\tau)\}$ be a Hilbert–Schmidt process, and $\int\limits_0^\tau \|S(t)R^{-1}B\|_{GS}^2\, dt < \infty$. Then for each $\xi \in ranR$ the process $\{X(t) = S(t)R^{-1}\xi + W_A(t)\}$ is a weak solution to (1.2) on $[0,T]$.*

Доказательство. To prove the equality (3.1), we take any $t \in [0,T)$, $y \in \operatorname{dom} A^*$ and consider the integral

$$\int\limits_0^t \langle X(s), A^*y\rangle ds = \int\limits_0^t \langle S(s)R^{-1}\xi, A^*y\rangle ds + \int\limits_0^t \langle \int\limits_0^s S(s-r)R^{-1}B\, dW(r), A^*y\rangle ds. \tag{3.2}$$

Taking into account properties of $S^*(t)$ proven and continuity of the scalar product, we have

$$\int\limits_0^t \langle S(s)R^{-1}\xi, A^*y\rangle ds = \langle R^{-1}\xi, \int\limits_0^t S^*(s)A^*yds\rangle = \langle R^{-1}\xi, \int\limits_0^t \frac{d}{ds}\left(S^*(s)y\right) ds\rangle.$$

$$\langle R^{-1}\xi, (S^*(t) - S^*(0))y\rangle = \langle S(t)R^{-1}\xi, y\rangle - \langle RR^{-1}\xi, y\rangle = \langle S(t)R^{-1}\xi, y\rangle - \langle \xi, y\rangle.$$

Thus $S(t)R^{-1}\xi$ is a solution of the homogeneous equation corresponding to (3.1) (a.e. since $\xi \in ranR$ a.e.)

Now we transform the second term in (3.2) and show that the stochastic convolution satisfies (3.1). Due to the stochastic Fubini theorem [2] and by definition of a stochastic integral as the limit of integral sums we obtain

$$\int\limits_0^t \langle \int\limits_0^s S(s-r)R^{-1}B\, dW(r), A^*y\rangle ds = \langle \int\limits_0^t \int\limits_r^t S(s-r)R^{-1}Bds\, dW(r), A^*y\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \langle \left(\int\limits_{r_m}^t S(s-r_m)R^{-1}Bds \right) (W(r_{m+1}) - W(r_m)), A^*y\rangle = \langle W_A(t), y\rangle - \langle BW(t), y\rangle.$$

Substituting both transformed integrals into (3.2) we have (3.1) a.e. □

Taking into consideration definition 3, we can obtain the following characteristics of the solution obtained

$$E[X(t)] = S(t)E[R^{-1}\xi], \quad t \in [0,T],$$

$$Cov[X(t)] = S(t)Cov[R^{-1}\xi]S^*(t) + \int\limits_0^t [S(t-s)R^{-1}B]Q[S(t-s)R^{-1}B]^* ds.$$

4. Cauchy problem in spaces of abstract stochastic distributions

Consider the probability space $(S'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(S'(\mathbb{R}^d)), \mu)$, where $S'(\mathbb{R}^d)$ is the space of tempered distributions, μ is the (unique) probability measure on $(S'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(S'(\mathbb{R}^d))$ satisfying the condition $\int_{S'(\mathbb{R}^d)} e^{i\langle\omega,\phi\rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$; here $\langle\omega,\phi\rangle$ denotes the action of $\omega \in S'(\mathbb{R}^d)$ on $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$. The measure μ is called a normalized Gaussian measure or white noise measure on $S'(\mathbb{R}^d)$ since for any orthogonal system of functions $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ from $S(\mathbb{R}^d)$ the equality

$$E\left(f(\langle\omega,\xi_1\rangle, \langle\omega,\xi_2\rangle, \ldots, \langle\omega,\xi_n\rangle)\right) = \frac{1}{(2\pi \prod_{i=1}^n \|\xi_i\|^2)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\|\xi_i\|^2}} dx_1 \ldots dx_n$$

holds for any function $f(x), x \in \mathbb{R}^n$, such that the integral in the right hand side exists. We will denote the space of square integrable by μ functions defined on $S'(\mathbb{R}^d)$ and with values in $\mathbb{R}$ by $L_2(S';\mathbb{R})$ and H-valued functions on $S'(\mathbb{R}^d)$ with square integrable norm by $L_2(S';H)$.

Construction of H-valued test function spaces $S(H)_\rho$ and spaces of H-valued stochastic distributions $S(H)_{-\rho}$ $(\rho \in [0,1])$:

$$S(H)_1 \subset S(H)_\rho \subset S(H)_0 \subset L_2(S';H) \subset S(H)_{-0} \subset S(H)_{-\rho} \subset S(H)_{-1} \tag{4.1}$$

is the first essential step in the theory of abstract stochastic distributions.

To construct a basis for $L_2(S';H)$, we use the classical Wiener-Itô expansion of elements $f \in L_2(S';\mathbb{R})$ in terms of stochastic Hermite polynomials $H_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^\infty h_{\alpha_i}(\langle \omega, \xi_i \rangle),\ \alpha \in \mathcal{J}$ [5]:

$$f(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} f_\alpha H_\alpha(\omega) := \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha \in \Gamma_n} f_\alpha H_\alpha(\omega), \quad \omega \in S'(\mathbb{R}^d),$$

where $\Gamma_n := \{\alpha \in \mathcal{J} : \alpha_i \le n \text{ for } i \le n \text{ and } \alpha_i = 0, \text{ for } i > n\}$, $f_\alpha = (\alpha!)^{-1}\langle f(\omega), H_\alpha(\omega)\rangle_{L_2(S';\mathbb{R})}$ are Fourier coefficients, $h_n(x)$ are orthogonal Hermite polynomials with weight $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, and $\xi_n(x)$ are Hermite functions forming the basis in $L_2(\mathbb{R})$.

Due to the properties of measure μ, the system of stochastic Hermite polynomials is orthogonal in $L_2(S';\mathbb{R})$: $E\,(H_\alpha H_\beta) = 0$ if $\alpha \ne \beta$ and $\|H_\alpha\| = \alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\ldots$. Furthermore, $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ forms the orthogonal basis in $L_2(S';\mathbb{R})$ [5].

Definition 6. Let $\rho \in [0,1]$. Define $S(H)_\rho$ as the space of functions f from $L_2(S';H)$: $f(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}\sum_{i=1}^\infty f_{i\alpha} H_\alpha(\omega) e_i,\ f_{i\alpha} \in \mathbb{R}$, such that for every $k \in \mathbb{N}$, $\|f\|^2_{\rho,k} = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}\sum_{i=1}^\infty (\alpha!)^{1+\rho} f^2_{i\alpha}(2\mathbb{N})^{k\alpha} < \infty$. Define $S(H)_{-\rho}$ as the the space of all formal expansions

$$F(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}\sum_{i=1}^\infty c_{i\alpha} H_\alpha(\omega) e_i = \sum_{i=1}^\infty c_\alpha H_\alpha(\omega)\ , \quad c_{i\alpha} \in \mathbb{R}\ , c_\alpha \in H, \tag{4.2}$$

such that there exists $q \in \mathbb{N}$: $\|F\|^2_{-\rho,-q} = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}\sum_{i=1}^\infty (\alpha!)^{1-\rho} c^2_{i\alpha}(2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty$.

This definition implies the inclusions (4.1).

An H-valued *Wiener process* $\{W(t)\}$ is defined by the expansion $W(t) := \sum_{i=1}^\infty \beta_i(t) e_i,\ t \in [0,\infty)$, which converges in $S(H)_{-\rho}$. This is generalization of the H-valued Q-Wiener process with the expansion $W(t) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \beta_i(t) e_i$ convergent in $L_2(S';H)$ for any trace–class self–adjoint operator Q with eigenvalues λ_i.

Due to the properties of the white noise measure μ, function $f(\omega) = \omega$ may be considered as a white noise in spaces $S(H)_{-\rho}$, therefore a Brownian motion $\{\beta(t)\}$ in $(S'(\mathbb{R}), \mathcal{B}(S'(\mathbb{R})), \mu)$ is defined as a 'primitive' of ω: for $t \ge 0$, $\omega \in S'(\mathbb{R})$

$$\beta(t) = \beta(t,\omega) := \langle \omega, \chi_{[0,t]}\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle \omega, \chi_k\rangle,$$

where $\chi_{[0,t]}$ is the indicator function of $[0,t]$ and $\{\chi_k\}_{k=1}^\infty$ is a sequence of functions from S convergent to $\chi_{[0;t]}$ in $L_2(S';\mathbb{R})$. The limit exists in the space $L_2(S';\mathbb{R})$ and does not depend on a choice of the sequence. It is not difficult to verify that $\{\beta(t)\}$ defined satisfies all properties of the Brownian motion. The process $\{\beta(t)\}$ admits the following expansion

$$\beta(t) = \langle \omega, \chi_{[0,t]}\rangle = \langle \omega, \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \xi_j(s)ds \cdot \xi_j\rangle = \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \xi_j(s)ds \langle \omega, \xi_j\rangle = \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \xi_j(s)ds H_{\varepsilon_j}(\omega),$$

where $\varepsilon_j = (0,\ldots,0,1,0\ldots) \in \mathcal{J}$ is a sequence with 1 in the j-th place.

In [4] a sequence of independent Brownian motions is constructed in a similar way:

$$\beta_i(t) = \sum_{j=1}^\infty \int_0^t \xi_j(s)ds\ H_{\varepsilon_{n(i,j)}}(\omega) = \sum_{k=1}^\infty \theta_{ik}(t) H_{\varepsilon_k}(\omega), \quad \theta_{ik}(t) = \begin{cases} \int_0^t \xi_j(s)ds & , \ k = n(i,j) \\ 0 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$

with a special choice of $n(i,j)$. Expressions for $\beta_i(t)$'s imply the following representation of the Wiener process:

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) e_i = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \theta_{ik}(t) H_{\varepsilon_k} e_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \theta_{ik}(t) e_i \right) H_{\varepsilon_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n(i,j),k} \left(\int_0^t \xi_j(s) ds\ e_i \right) H_{\varepsilon_k} =: \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(t) H_{\varepsilon_k} \ , \quad \theta_k(t) = \delta_{n(i,j),k} \int_0^t \xi_j(s) ds\ e_i \ . \end{aligned}$$

For all $t \in [0,\infty)$ this sum does not converge in $L_2(S', H)$, but it does belong to $S(H)_{-0}$. An H-valued *singular white noise process* is defined then as a formal derivative of $\{W(t)\}$:

$$\mathbf{W}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{n(i,j),k} \left(\xi_j(t) e_i \right) H_{\varepsilon_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{W}_k(t) H_{\varepsilon_k} \in S(H)_{-0} \, . \tag{4.3}$$

Now we give the important definitions of Wick product and Hermite transform. Let $F, G \in S(H)_{-1}$ be of the form (4.2) with coefficients $c_{i\alpha}, d_{i\beta}$, then *Wick product*

$$F \diamond G(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} F_i \diamond G_i(\omega) e_i = \sum_{\gamma \in \mathcal{J}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_{i\alpha} d_{i\beta} \right) H_\gamma(\omega) e_i = \sum_{\gamma \in \mathcal{J}} g_\gamma H_\gamma(\omega) \in S(H)_{-1},$$

where $g_\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_{i\alpha} d_{i\beta} e_i =: \sum_{i=1}^{\infty} g_{i\gamma} e_i$. The Wick product possesses the properties of commutativity, associativity, and distributivity. Space $S(H)_{-1}$ is invariant with respect to Wick product, that is if $F, G \in S(H)_{-1}$, then $F \diamond G \in S(H)_{-1}$. Furthermore, if $F \in S(H)_{-0}$, then $F \diamond \mathbf{W}(t) \in S(H)_{-0}$.

The *Hermite transform* of $F = \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha H_\alpha(\omega) \in S(H)_{-1}$, $c_\alpha \in H$, is defined by $\mathcal{H}[F](z) := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha z^\alpha$, for $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ such that the limit exists in H (we assume H to be a complex Hilbert space, otherwise we can consider the complexification of a real Hilbert space).

For any $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha H_\alpha(\omega) \in S(H)_{-1}$, there exists such $q > 1$ that for every $z \in \overline{\mathbf{K}}_q$ the series $\mathcal{H}[F](z)$ converges absolutely. Here

$$\mathbf{K}_q := \{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ \ |z_i| < (2i)^{-q}, \ i \in \mathbb{N} \}.$$

Conversely, if $G(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha z^\alpha : \mathbf{K}_q \to H$, $q > 1$, is bounded, then the formal sum $G := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha H_\alpha$ belongs to $S(H)_{-1}$, and $\mathcal{H}[G](z) = G(z)$.

Finally, we note that if $F,\ G \in S(H)_{-1}$, then for all z such that $\mathcal{H}F(z)$ and $\mathcal{H}G(z)$ exist, we have $\mathcal{H}[F \diamond G](z) = \mathcal{H}F(z)\ \mathcal{H}G(z)$.

Now we consider the Cauchy problem (1.1) with A being the generator of an R-semigroup in H. Let B be a bounded linear operator in H and $\{\mathbf{W}(t)\}$ be an H-valued white noise process.

First we define the action of linear operators on elements of $S(H)_{\pm\rho}, \rho \in [0,1]$. For $B \in L(H)$ and for $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha H_\alpha$ from $S(H)_{\pm\rho}$ or $L_2(S', H)$ we define $BF(\omega) := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (Bc_\alpha) H_\alpha(\omega)$. Here, since $\|Bc_\alpha\|_H \le \|B\|\ \|c_\alpha\|_H$, then BF is an element of the same space as F. For an unbounded operator A define $AF(\omega) := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (Ac_\alpha) H_\alpha(\omega)$ for

$$F \in (Dom\, A)_{-\rho} := \{ F(\cdot) \in S(H)_{-1} \ : \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|Ac_\alpha\|_H^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty, \ \ \text{for certain } q \in \mathbb{N} \}.$$

Thus we consider the following Cauchy problem in $S(H)_{-1}$

$$\langle \frac{dX(t)}{dt}, \phi \rangle = \langle AX(t) + B\mathbf{W}(t), \phi \rangle, \ t \in [0,T], \quad \langle X(0), \phi \rangle = \langle \xi, \phi \rangle, \quad \phi \in S(H), \tag{4.4}$$

$\xi \in (Dom\, A)_{-1}$. To introduce the notion of stochastic convolution we recall the definitions of Pettis and Hitsuda-Skorohod integrals. The process $F(t) : \mathbb{R} \to S(H)_{-0}$ is said to be Pettis integrable if $\langle F(t), \phi \rangle \in L_1(\mathbb{R}, dt)$ for each $\phi \in S(H)_0$. In this case (an unique element) $\Phi \in S(H)_{-0}$ defined as $\langle \Phi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle F(t), \phi \rangle dt, \ \phi \in S(H)_0$ is called *the Pettis integral* of $F(t)$.

Let $Y(t-s)\mathbf{W}(s)$ be Pettis integrable, then

$$\int_0^t Y(t-s)\diamond\mathbf{W}(s)ds=\sum_{k=1}^{\infty}(\int_0^t Y(t-s)\mathbf{W}_k(s)ds)H_{\varepsilon_k}=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t Y(t-s)e_i\delta\beta_i(s)$$

is called *the stochastic convolution.* The stochastic convolution belongs to $S(H)_{-0}$. Since $t\in[0,T], T<\infty$, then condition $\int_0^T\|Y(t)\|^2dt<\infty$ is sufficient for its existence [4]. Thus $W_A(t):=\int_0^t S(t-s)R^{-1}BW(s)ds$ is the stochastic convolution for (4.4) with A being the generator of an R-semigroup $\{S(t)\}$.

Now we return to the Cauchy problem (4.4).

Theorem 3. *Let A be the generator of an R-semigroup $\{S(t), t\in[0,\tau)\}, \tau>T$, in H. Suppose operator R is invertible and with dense range, $R^{-1}B\in L(H)$, and $R^{-1}\xi\in(Dom\,A)_{-1}$. Then the stochastic Cauchy problem (4.4) has a continuously differentiable solution in the space $S(H)_{-1}$ $X(t)=S(t)R^{-1}\xi+W_A(t),\ \xi\in(Dom\,A)_{-1}$.*

Sketch of proof. We apply the Hermite transform to (4.4).

Due to the connection between differentiability of a process and differentiability of its Hermite transform [4, 9], $\{X(t)\}$ is continuously differentiable on $[0,T]$ if there exist such $F\in S(H)_{-1}$ and $q>1$ that

1) $\mathcal{H}[X](t,z)$ and $\mathcal{H}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right](t,z)$ exist for each $z\in\mathbf{K}_q$ for a certain q ;
2) $\mathcal{H}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right](t,z)$ is continuous on $[0,T]$ and is bounded as $(t,z)\in[0,T]\times\mathbf{K}_q$;
3) $\mathcal{H}[X](t,z)$ is differentiable on $[0,T]$ and $\frac{d\mathcal{H}[X](t,z)}{dt}=\mathcal{H}[F](t,z)$ for each $(t,z)\in[0,T]\times\mathbf{K}_q$.

Further, due to the additivity of the Hermite transform and the property $\mathcal{H}[AF](z)=A\mathcal{H}F(z)$, $z\in\mathbf{K}_q$, that takes place for any closed operator A and we arrive to the equation

$$\frac{d\mathcal{H}[X](t,z)}{dt}=A\mathcal{H}[X](t,z)+B\mathcal{H}[\mathbf{W}](t,z). \tag{4.5}$$

To show that $\mathcal{H}[X](t,z)=S(t)R^{-1}\mathcal{H}\xi(z)+\int_0^t S(t-s)R^{-1}B\mathcal{H}[\mathbf{W}](s,z)ds$ is a solution of (4.5) for $z\in\mathbf{K}_q$ and for a certain q, we use the Hermite transform of $\mathbf{W}(t)$ and $\mathbf{W}'(t)$:

$$\mathcal{H}[\mathbf{W}](t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{W}_k(t)z^{\varepsilon_k},\quad \mathcal{H}[\mathbf{W}'](t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{W}'_k(t)z^{\varepsilon_k},$$

$\mathcal{H}[\mathbf{W}](t,z)$ and $\mathcal{H}[\mathbf{W}'](t,z)$ exist for $z\in\mathbf{K}_q$, $q>2$. This is due to the property of Hermite functions $\sup_{t\in[0,T]}\|\xi'_j(t)\|\le Cj\le Ck$ which implies

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\mathbf{W}'_k(t)z^{-q\varepsilon_k}\|_H\le\sum_{k=1}^{\infty}\|\mathbf{W}'_k(t)\|_H\ |z^{-q\varepsilon_k}|\le C\sum_{k=1}^{\infty}k(2k)^{-q}<\infty,\ \textit{for}\ q>2.$$

Now using the assertion that if a function $F(t,z):[0,T]\times\mathbf{K}_q\to H$, $q>1$, is bounded and coefficients $c_\alpha(t)$ in the expansion $F(t,z)=\sum_{\alpha\in\mathcal{J}}c_\alpha(t)z^\alpha$ are continuous in $t\in[0,T]$, then $F(t,z)$ is continuous on $[0,T]$ and $z\in\overline{\mathbf{K}}_{2q}$ [4], we obtain that for $q>4$ the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{W}'_k(t)z^{\varepsilon_k}$ is continuous on $[0,T]$. Due to the relation between differentiability a process and differentiability of its Hermite transform mentioned above, we obtain that the process $\{\mathbf{W}(t)\}$ has a continuous derivative on $[0,T]$. Due to its property,

$$\mathcal{H}X(t)=S(t)R^{-1}\mathcal{H}\xi+\int_0^t\int_0^{t-s}S(r)R^{-1}B\mathcal{H}\mathbf{W}'(s)drds.$$

Using the equality for the generator of an R-semigroup $\{S(t)\}$ and properties of the Hermite transform, we obtain that

$$X(t)=S(t)R^{-1}\xi+\int_0^t S(t-s)R^{-1}B\mathbf{W}(s)ds=S(t)R^{-1}\xi+\int_0^t S(t-s)R^{-1}B\delta W(s)$$

satisfies (4.4) in $S(H)_{-1}$. $\square$

Using the definition of generalized mathematical expectation $E[F] = \mathcal{H}F(0) \in H$, for $F = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} c_\alpha H_\alpha \in S(H)_{-1}$ we arrive to the generalized mathematical expectation of the solution obtained: $E[X(t)] = S(t)E[R^{-1}\xi]$.

References

[1] A.V.Balakrishnan Âpplied functional Analysis, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, (1976).

[2] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge Univ. Press (1992).

[3] E. B. Davies and M. M. Pang, "The Cauchy problem and a generalization of the Hille-Yosida theorem", *Proc. London Math. Soc.*, **55**, no. 1, 181–208 (1987).

[4] A. Filinkov and J. Sorensen, "Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions", *Stochastics and Stochastics Reports*, **72**, no. 3–4, 129–173 (2002).

[5] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe and T. Zhang, *Stochastic partial differential equations. A modelling, white noise functional approach*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin (1996).

[6] H. H. Kuo, *Lectures on white noise analysis*, Soochow Journal of Mathematics, vol. 18, no. 3, 229–300 (1992).

[7] Irina V. Melnikova and Alexei Filinkov, *The Cauchy problem: Three approaches* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **120**, CRC Press, London (2001).

[8] I.V. Melnikova, A.I. Filinkov and U.A. Anufrieva, "Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions", *Journal of Mathematical Sciences*, **111**, no. 2, 3430–3475 (2002).

[9] I.V. Melnikova, A.I. Filinkov and M.A. Alshansky, "Abstract stochastic equations II. Solutions in Spaces of Abstract Stochastic Distributions", *Journal of Mathematical Sciences*, **116**, no. 5, 3620–3656 (2003).

[10] I.V. Melnikova and U.A. Anufrieva, "Pecularities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators", *Journal of Mathematical Sciences* (2005).

VARIOUS ASPECTS OF FUGLEDE'S THEOREM

V.S. Shulman

To Heydar Radjavi with warm sympathy -
on the occasion of his 70-th birthday

1. Introduction

The famous Fuglede's Theorem states that a bounded operator on a Hilbert space, commuting with a normal operator N, commutes with its adjoint N^*. It was proved in the paper [14] as the answer to the question of von Neumann [26]. This result has appeared to be related to various areas of operator theory and Banach algebras. We will discuss several directions in which Fuglede Theorem was developed. A few results and arguments in the paper seem to be new, but the main aim is to present a kind of review of the topic. The review does not pretend to be complete, but we hope that in the bibliography a reader can find all results we missed. We tried to indicate the ideas of the proofs for most results. This is unusual for reviews so we were forced to do this in a very compressed form; in fact our term "proof"usually means "a sketch of the proof".

Our notation is standard. The term *operator* means *bounded linear operator on a Banach space.* By $\sigma(X)$ we denote the spectrum of an operator X. For brevity the commutator $AB-BA$ of two operators is sometimes denoted by $[A,B]$. By $B(\mathfrak{X})$ we denote the algebra of all operators on a Banach space $\mathfrak{X}$.

2. Growth of the exponent

The original proof of Fuglede's Theorem in [14] (see also [15, Problem 153]) was reduced to the proof that all spectral subspaces of a normal operator N are invariant for all operators commuting with N. In this form the result was extended to various kinds of "spectral"operators, see [9] and the references therein.

M. Rosenblum [29] was the first who noticed that the result is related to complex analysis. His proof of Fuglede Theorem used only the fact that for an Hermitian operator T the function $z \to \exp(zT)$ is bounded on the real axis:

$$\|\exp(itT)\| = 1 \text{ for all t} \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

If a normal operator $N = T + iS$ commutes with X then one has the equality $[T,X] = [-iS,X]$, which can be "exponented":

$$\exp(zT)X\exp(-zT) = \exp(-izS)X\exp(izS). \tag{2.2}$$

Using (2.1) one can easily see that the left (= right) part of (2.2) is bounded on $\mathbb{C}$. By Liouville's Theorem, it is constant, whence $[T,X] = 0$.

E.A.Gorin proved that if instead of Liouville theorem one uses the Phragmen-Lindelef Theorem, the condition on the growth of exponent can be cosiderably weakened. It is convenient to consider a more general situation.

Theorem 1. [6] *Let an operator A, acting on a Banach space $\mathfrak{X}$, be decomposed into a sum $A = T+iS$, where $[S,T]=0$, S has real spectrum and T satisfies the condition*

$$\|exp(itT)\| = o(|t|) \text{ for t} \to \infty. \tag{2.3}$$

Then $\ker(A) = \ker(T) \cap \ker(S)$.

Proof. Let $\mathcal{Y} = \ker(A)$. Since A commutes with T and S, $\mathcal{Y}$ is invariant for T and S. Let T_0 and S_0 be the restrictions of T and S to $\mathcal{Y}$. Then T_0 is Hermitian, S_0 has real spectrum and $T_0 = -iS_0$. It follows that the norm of the function $f(z) = \exp(zT_0)$ is $o(|z|)$ on the imaginary axis and $o(\exp(\varepsilon|z|))$, for each $\varepsilon > 0$, on the real axis. Using the Phragmen-Lindelef Theorem (in a very non-standard form!) one can show that $f(z) = const$. This means that $T_0 = S_0 = 0$, $Y \subset \ker(T) \cap \ker(S)$. The converse inclusion is evident.

Note that instead of direct complex analysis, one can use in the previous proof the Gelfand-Hille Theorem [16, Theorem 4.10.1]. Indeed the main point was to prove that if an operator T satisfies (2.3) and $\sigma(iT) \subset \mathbb{R}$ then $T = 0$. Since (2.3) clearly implies that $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, we see that $\sigma(T) = \{0\}$. Set

$U = \exp(iT)$, then $\sigma(U) = \{1\}$ and $\|U^n\| = o(|n|)$ whence $U = 1$ by Gelfand-Hille theorem. It follows that $T = 0$ (if one takes into account that $\sigma(T) = \{0\}$).

Corollary 1. *Let an operator N on a Banach space $\mathfrak{X}$ can be written as a sum $N = U + iV$ where $[U,V] = 0$, V has real spectrum and U satisfies condition*

$$\|\exp(itU)\| = o(|t|^{1/2}). \tag{2.4}$$

If an operator X commutes with N then it commutes with U and V.

Proof. We denote by L_N, R_N the left and right multiplication operators on the Banach space $\mathfrak{Y} = B(\mathfrak{X})$ of all operators on $\mathfrak{X}$. Let $\delta_N = L_N - R_N$. Then the commutant of N is the kernel of δ_N. It is easy to check that $\delta_N = \delta_U + i\delta_V$, δ_V has real spectrum and $\|\exp(it\delta_U)\| = 0(|t|)$. So it remains to apply Theorem 1.

An operator T on a Banach space (more generally, an element of a Banach algebra) is called *Hermitian* (or $\mathcal{H}$-Hermitian, when it is necessary to underline that the space is not Hilbert) if $\|\exp(itT)\| = 1$ for all $t \in \mathbb{R}$. It is well known ([32],[20]) that the spectrum $\sigma(T)$ of an Hermitian operator T is real and that its spectral radius $\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ coincides with $\|T\|$.

It can be checked via the formula $\exp(A+B) = \lim_{n\to\infty}(\exp(A/n)exp(B/n))^n$ (see [10]) that the sum of Hermitian operators is Hermitian. Note that a square of an Hermitian operator need not be Hermitian.

An operator A is *representable* if $A = T + iS$ where T and S are Hermitian. The operators T, S (the real and imaginary parts of A) are uniquely defined. Indeed if $T+iS = M+iN$ then $T-M = i(N-S)$. But operators $T-M$ and $N-S$ are Hermitian, so their spectra are real. Hence the above equality is possible only if their spectra consist of 0. Thus $T-M$ and $N-S$ are quasinilpotent, hence zero. The operator $A^* = T - iS$ is called $\mathcal{H}$-adjoint to A.

A representable operator $A = T + iS$ is called *$\mathcal{H}$-normal* (or simply *normal*) if T, S commute (equivalently A, T commute or A, A^* commute).

For operators on a Hilbert space these definitions coincide with usual definitions of Hermitian (selfadjoint), normal and adjoint operators.

The following result is an immediate consequence of Corollary 1.

Corollary 2. *If A is a normal operator on a Banach space then* $\ker(A) = \ker(A^*)$.

Problem 1. Let A be an $\mathcal{H}$-normal operator. Suppose that A is invertible and that A^{-1} is also normal. Is it true that $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$?

The following result is one of Banach-algebraic versions of Fuglede's Theorem.

Theorem 2. [39]. *If elements a, b of a Banach algebra $\mathcal{A}$ commute and satisfy estimate*

$$\|\exp(\lambda a - \overline{\lambda} b)\| = o(|\lambda|) \tag{2.5}$$

when $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, then the closed left (right) ideals generated by them coincide.

This theorem implies that if A is a normal operator on a Banach space $\mathcal{X}$ then A and A^* generate the same closed left ideals of $B(\mathcal{X})$. Since for each $\xi \in \mathcal{X}$ the set of all operators D, satisfying $D\xi = 0$, is a closed left ideal, we conclude that $\ker(A) = \ker(A^*)$.

Conversely one can deduce Theorem 2 from Theorem 2 if considers the representation π of $\mathcal{A}$ on its dual space $\mathcal{A}^*$: $(\pi(a)F)(b) = F(ab)$. Indeed the kernel of $\pi(a)$ is the annihilator of the left ideal generated by a.

Using another constructions of left ideals in $B(\mathcal{X})$ one can obtain various consequences of Theorem 2.

Corollary 3. *Let A be a normal operator on a Banach space $\mathcal{X}$.*

(i) If x_n is a bounded sequence in $\mathcal{X}$ and $Ax_n \to 0$ (strongly or weakly) then $A^*x_n \to 0$.

(ii) If a subset $M \subset \mathcal{X}$ is bounded and AM is precompact then A^*M is precompact.

(iii) $\overline{A\mathcal{X}} = \overline{A^*\mathcal{X}}$.

On this way one can obtain various "asymthotic Fuglede Theorems", see for example [7].

The listed in Corollaries 3 and 2 properties of $\mathcal{H}$-normal operators are the analogues of the corresponding properties of normal operators on Hilbert spaces. In this series let us also mention useful results ([13], see also [34]) about the decomposition of a space into "orthogonal"sum of the kernel and the closure of the image of a normal operator.

Theorem 3. *If* $A = T + iS$ *is a normal operator on a Banach space* $\mathcal{X}$ *then* $\ker A$ *does not intersect* $\overline{A\mathcal{X}}$. *Moreover if* $\mathcal{X}$ *is reflexive then* $\mathcal{X} = \ker A \dot{+} \overline{A\mathcal{X}}$ *and the projection of* $\mathcal{X}$ *onto* $\ker A$ *is of norm 1.*

The idea of the proof is the following. Let μ be an invariant mean on the group $\mathbb{R}^2$. Define the operator P by $\langle Px, f\rangle = \mu(\phi_{x,f})$ for each $x \in \mathcal{X}$, $f \in \mathcal{X}^*$, where $\phi_{x,f}(s,t) = \langle(\exp(i(tT + sS))x, f\rangle$. Then (in the case that $\mathcal{X}$ is reflexive) P is the projection onto $\ker A$ along $\overline{A\mathcal{X}}$.

There is a lot of publications about operators satisfying more weak than (2.3) conditions on the growth of the exponent. Kantorovich [19], Barnes [3] developed the theory of operators satisfying the condition

$$\| \exp(itT)\| = O(|t|^k) \text{ for t} \to \infty \tag{2.6}$$

(operators of class $\mathcal{S}_k$). We will formulate only a result from the paper of Aupetit and Drissi [2] which contains many other important results of spectral theory of such operators. Their approach, as well as Gorin's one, heavily uses the theory of entire functions.

For an operator $A \in B(\mathfrak{X})$ and a vector $x \in \mathfrak{X}$, set $r_x(A) = \limsup \|A^n x\|^{1/n}$ (the *local spectral radius*).

Theorem 4. *Let* $N = T + iS$ *where* T, S *are operators of the class* $\mathcal{S}_k$ *and* $[T, S] = 0$. *Then for each vector* x, $r_x(T) \le r_x(N)$.

K.Boyadzhiev has found another interesting extension of Fuglede Theorem, formulated in terms of the growth of the exponent (in the sense that it deals with Hermitian operators on Banach spaces).

Theorem 5. [4] *Let* $P(t_1, ..., t_n)$ *be a polynomial in n variables without zeros in* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *If* $T_1, ..., T_n$ *are commuting* $\mathcal{H}$*-Hermitian operators then* $\ker P(T_1, ..., T_n) \subset \cap_{k=1}^n \ker T_k$.

To obtain Fuglede Theorem (in the form of Corollary 2) from Theorem 5, one should take $P(t_1, t_2) = t_1 + it_2$.

We will deduce Boyadzhiev's Theorem in the next section using the technique of spectral synthesis in Banach algebras.

3. Spectral synthesis

Let $\mathcal{A}$ be a regular commutative Banach algebra; we consider $\mathcal{A}$ as a subalgebra of $C(K)$ where K is the space of maximal ideals of $\mathcal{A}$ (but the norm $\|.\|$ in $\mathcal{A}$ can be different from the supremum-norm).

For a closed subset $Q \subset K$ we denote by $I(Q)$ the ideal of all functions in $\mathcal{A}$ equal to zero on Q, and by $J_0(Q)$ the ideal of all $f \in \mathcal{A}$ which are equal to zero on a neighborhood of Q. The closure of $J_0(Q)$ in $\mathcal{A}$ is denoted by $J(Q)$. If $I(Q) = J(Q)$ then Q is called a set of spectral synthesis in $\mathcal{A}$.

Let $E \subset \mathcal{A}$ and $null(E)$ be its zero-set: $null(E) = \{t \in K : f(t) = 0 \text{ for all } f \in E\}$.

Clearly $null(I(Q)) = null(J(Q)) = Q$. It can be proved that all closed ideals with zero-set Q lie between $J(Q)$ and $I(Q)$. The set Q is called *the set of synthesis* if $I(Q) = J(Q)$.

A subset $E \subset \mathcal{A}$ is called synthesisable if $E \subset J(null(E))$.

Theorem 6. [35] *Let* E, F *be subsets of* $\mathcal{A}$ *with* $null(F) \subset null(E)$. *If* E *is synthesisable then for any representation* π *of* $\mathcal{A}$,

$$\ker \pi(F) \subset \ker \pi(E). \tag{3.1}$$

Proof. Let Z be the closed ideal of $\mathcal{A}$, generated by F. Then $Z \supset J(null(F)$ because $J(null(F)$ is the smallest closed ideal with zero-set $null(F)$. Hence $Z \supset J(null(E)) \supset E$.

It follows that $\pi(E) \subset W$ where W is the closed left ideal in $B(\mathcal{X})$, generated by $\pi(F)$. Hence $\ker(\pi(F)) = \ker W \subset \ker(\pi(E))$

The advantage of Theorem 6 is that it gives possibility to use non-trivial results on spectral synthesis. For example, Theorem 5 follows from Theorem 6 and the fact that one-element sets are sets of synthesis for group algebras (Ditkin's Theorem).

Indeed let Π be an n-dimensional cube in $\mathbb{R}^n$ containing $\sigma(T_1) \times ... \times \sigma(T_n)$. Denote by $\mathcal{F}_n$ the algebra of Fourier transforms of finite measures on $\mathbb{R}^n$ and by $\mathcal{A}$ its restriction to Π. Let F consist of one function $P|\Pi$ (the restriction of the polynomial P to Π) and E be the family of coordinate functions

$\xi_1, ..., \xi_n$ (defined by $\xi_k(t_1, ..., t_n) = t_k$). Since $null(E) = \{(0, ..., 0)\}$ is the set of spectral synthesis, E is synthesisable. The inclusion $null(F) \subset null(E)$ follows from the assumptions of Theorem 5.

Let ρ be the representation of $\mathcal{F}_n$ defined by the formula

$$\rho(\hat{\mu}) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i \sum_{k=1}^{n} \xi_k(t) T_k) d\mu(t).$$

If a function in $\mathcal{F}_n$ equals zero on Π then $\rho(f) = 0$. Hence ρ defines a representation π of $\mathcal{A}$. Applying to π Theorem 6, we get:

$$\ker(P(T_1, ..., T_n)) = \ker(\pi(F)) \subset \ker(\pi(E)) = \cap_{k=1}^{n} \ker(T_k).$$

Clearly this approach allows to extend Boyadzhiev's Theorem from the case that P is a polynomial to the case that P is arbitrary smooth function.

The following version of Fuglede theorem is often of use (and follows easily from Theorem 2).

Theorem 7. *If $\mathcal{A} = C(K)$ then for any Banach $\mathcal{A}$-bimodule $\mathfrak{M}$ and each $a \in \mathcal{A}$ the equations $a\xi = \xi a$ and $a^*\xi = \xi a^*$ are equivalent in $\mathfrak{M}$.*

The question is: can $C(K)$ be changed by other regular commutative Banach *-algebras?

Roughly speaking the answer is negative: if the analog of Theorem 7 holds for $\mathcal{A}$ then all closed ideals of $\mathcal{A}$ must be symmetric, which is not true for group algebras and other important examples. But if we consider only those elements a that separate maximal ideals, the class becomes quite wide.

Let $V_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{A}$, the projective tensor product. Then $V_{\mathcal{A}}$ can be realized as a function algebra on $K \times K$, where as above K is the character space of $\mathcal{A}$. Denote by Δ the diagonal in $K \times K$: $\Delta = \{(t, t) : t \in K\}$. If Δ is a set of synthesis for $V_{\mathcal{A}}$ then we say that $\mathcal{A}$ belongs to the class (SD).

The class (SD) is stable with respect to the closure of the image of a homomorphism. This implies that it contains all algebras $C(K)$, group algebras, regular quotients of measure algebras, tensor algebras and so on.

Theorem 8. [35] *If $\mathcal{A}$ belongs to (SD) then for any Banach $\mathcal{A}$-bimodule $\mathfrak{M}$ and each element $a \in \mathcal{A}$, that separates maximal ideals of $\mathcal{A}$, the equations $a\xi = \xi a$ and $a^*\xi = \xi a^*$ are equivalent in $\mathfrak{M}$.*

Proof. It suffices to apply Theorem 6 to the natural representation π of $V_{\mathcal{A}}$ on $\mathfrak{M}$: $\pi(a \otimes b)\xi = a\xi b$. Indeed the one element sets $E = \{a \otimes 1 - 1 \otimes a\}$ and $F = \{a^* \otimes 1 - 1 \otimes a^*\}$ have the same zero-set Δ which is a set of synthesis.

It should be noted that the question "in which Banach *-algebras the Fuglede Theorem holds?"can be put in another forms. The most direct one is: for which *-algebras the conditions $[a, a^*] = 0$, $[a, x] = 0$ imply $[a^*, x] = 0$? We note only that this is evidently true if an algebra has an injective *-representation in a Hilbert space. For example this is true for all C*-algebras.

We will find other applications of Theorem 6 in the next section.

4. Linear operator equations

Putnam [28] extended Fuglede Theorem in the following way: if N_1, N_2 are normal operators on a Hilbert space H then any operator X satisfying condition $N_1 X = X N_2$ satisfies $N_1^* X = X N_2^*$. This result follows from Theorem 2 in the same way as Fuglede Theorem. But it indicates a natural further step in study of the topic: to consider linear operator equations

$$\sum_{k=1}^{n} A_k X B_k = 0 \tag{4.1}$$

and

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^* X B_k^* = 0 \tag{4.2}$$

on $B(H)$, where $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, ..., B_n)$ are commutative n-tuples of normal operators. Underline that it is not assumed that A_i commute with B_j - only that $[A_i, A_j] = 0$ and $[B_i, B_j] = 0$.

Are the equations (4.1) and (4.2) equivalent? This question was considered in numerous early publications but mostly for special n-tuples. In the precise form it was formulated by G.Weiss [43]. The answer was obtained in [38]: no. The construction of the counterexample was based on a modification of the famous L.Schwartz's example of the set of spectral non-synthesis for the Fourier algebra of the group $\mathbb{R}^3$.

On the other hand, in [36] the following "positive"result was obtained.

Theorem 9. *If Hausdorff dimension $d(\mathbb{A})$ of the joint spectrum $\sigma(\mathbb{A})$ of the family $\mathbb{A}$ does not exceed 2, then the equations (4.1) and (4.2) are equivalent.*

Underline that we impose restrictions only on one of coefficient n-tuples.

The proof uses a technique of "approximate inverse intertwinings"which we will briefly describe later (see also [40] for transparent exposition and many related results), but for the case that *both* $d(\mathbb{A})$ and $d(\mathbb{B})$ are *strictly* less than 2, the result can be obtained as a consequence of Theorem 6.

Indeed in this case there are Hermitian operators N and M such that $A_k = \varphi_k(N)$, $B_k = \psi_k(N)$ for some functions φ_k, ψ_k on $[0;1]$ that belong to the space Lip_α, for some $\alpha > 1/2$. The latter means that

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq C|t-s|^\alpha, \; |\psi(t) - \psi(s)| \leq C|t-s|^\alpha \tag{4.3}$$

for all $s, t \in [0;1]$.

Let $V = C([0;1])\hat{\otimes}C([0;1])$ and define the representation of V on the space $B(H)$ by the formula $\pi(f \otimes g)(X) = f(N)Xg(M)$. Then the space of all solutions of (4.1) (resp. (4.2)) is $\ker(\pi(s))$ (resp. $\ker(\pi(\overline{s})))$ where $s = \sum_k \varphi_k \otimes \psi_k$ or, in functional presentation, $s(t,s) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\psi_k(s)$. It is evident that $null(s) = null(\overline{s})$. By [41, Theorem 7.2.2], the condition (4.3) implies that s and $\overline{s}$ are synthesisable. So Theorem 6 implies the coincidence of the kernels.

Somewhat unexpectedly the result has applications to partial differential equations.

Corollary 4. [38, 40] *The space of bounded solutions of the equation*

$$p(i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2})u = 0 \tag{4.4}$$

on $\mathbb{R}^2$ is completely determined by the variety of zeros of the polynomial p in $\mathbb{R}^2$.

It would be interesting to know in what extent the results on linear operator equations in $B(H)$ with commuting normal coefficients can be repeated in the case of normal operators on Banach spaces. The following testing problem was posed by A.Trnovsek.

Problem 2. Let A, B be normal operators on a Banach space $\mathcal{X}$. Are the equations $AXB = X$ and $A^*XB^* = X$ equivalent?

We claim that Problems 1 and 2 are equivalent. Indeed, suppose that Problem 1 has positive answer. Denote by L_A and R_B the operators on $B(\mathcal{X})$ of left multiplication by A and of right multiplication by B respectively. They are normal operators on $B(\mathcal{X})$. Let $\mathcal{E} = \{X \in B(\mathcal{X}) : AXB = X\}$; it is the 1-eigenspace of $L_A R_B$. Since the operators L_A and R_B commute with $L_A R_B$, $\mathcal{E}$ is invariant for them; moreover it is invariant under their real and imaginary parts which implies that the restrictions of them to $\mathcal{E}$ are normal operators. But by definition $L_A|E = (R_B|E)^{-1}$. By our assumption, $L_{A^*}|E = (R_{B^*}|E)^{-1}$, that is $A^*XB^* = X$ for each $X \in \mathcal{E}$.

Conversely suppose that Problem 2 has positive answer. Let A be a normal operator on a Banach space and B its inverse which also is normal. Then 1 is a solution of the equation $AXB = X$, so by the assumption it is a solution of $A^*XB^* = X$, which means that $(A^*)^{-1} = B^*$.

5. Qualitative versions

For normal operators in Hilbert space the equality $\ker A = \ker A^*$ admits more strong variant: $\|Ax\| = \|A^*x\|$ for each vector x. It is natural to wonder if an analog of this equality holds for the operator $X \to NX - XN$.

In general the answer is negative and a counterexample can be easily found in 2×2 matrices. We consider a more modest hypothesis - that for a normal operator N on a Hilbert space H there is a constant $C > 0$ such that

$$\|N^*X - XN^*\| \leq C\|NX - XN\| \tag{5.1}$$

for each operator X.

It has appeared that this inequality holds for some normal operators but not for all. Namely the validity of (5.1) depends on the "degree of smoothness"of the spectrum of N.

Let us say that a compact $\alpha \subset \mathbb{C}$ is *smooth* at a non-isolated point $w \in \alpha$ if it has a "tangent at w this means that there is a straight line $L \ni w$ such that $dist(z, L) = o(|z - w|)$ when $z \to w$, $z \in \alpha$.

Let us also say that a simple Jordan line on $\mathbb{C}$ is 2-smooth if it has a parametrization $z = k(t)$ where the function k is twice differentiable and its derivative k' does not vanish.

Theorem 10. [21]
(i) If a normal operator N satisfies condition (5.1) then $\sigma(N)$ is smooth;
(ii) Conversely if $\sigma(N)$ is contained in a 2-smooth Jordan line then (5.1) holds.

The proof is based on some properties of Schur multipliers (see below).

Theorem 10 shows that the property (5.1) of normal operators is quite rare: it can not hold, for example, if $\sigma(N)$ has inner point, or angular-point, or cross-point. But the situation becomes absolutely different if instead of the operator norm one considers another unitary-symmetric norms, such as the norms of Shatten ideals $\mathfrak{S}_p$, $1 \leq p < \infty$. Recall that $\mathfrak{S}_p$ consists of those compact operators T for which $(T^*T)^{p/2}$ is nuclear; the norm $\|T\|_p$ of T is defined as $trace((T^*T)^{p/2})^{1/p}$. We denote sometimes by $\mathfrak{S}_\infty$ the ideal $K(H)$ of all compact operators, with usual operator norm.

Set $\|T\|_p = \infty$ if $T \notin \mathfrak{S}_p$.

Theorem 11. *For each $p \in (1, \infty)$ there is a constant $c(p)$ such that*

$$\|N^*X - XN^*\|_p \leq c(p)\|NX - XN\|_p \tag{5.2}$$

for all normal operators N and bounded operators X.

This result was firstly proved by Weiss [42] for $p = 2$. In this case $c(p) = 1$, so the inequality becomes an equality:

$$\|N^*X - XN^*\|_2 = \|NX - XN\|_2. \tag{5.3}$$

Weiss used in the proof a special and very complicated technique of generating functions. We will consider below the approach based on approximate inner intertwinings.

For $p \in (2; \infty)$, the result was proved by Abdessemend and Davies [1] who based their proof on the reduction to the transformation of triangular truncation and Gohberg-Krein-Macaev theorem about the boundedness of this transformation on $\mathfrak{S}_p$ (see [5]). No more easy proofs are known till now.

For $p \in (1; 2)$ the result was obtained in [34] by means of the theory of normal operators on Banach space: the listed above properties of such operators and duality theory allowed to make a reduction to the Davies Theorem.

A consequence of Theorem 11 is that if N is a compact operator, $X \in B(H)$ and $AX - XA \in \mathfrak{S}_p$, $1 < p < \infty$ then $A^*X - XA^* \in \mathfrak{S}_p$. For $p = \infty$ this is also true (easily follows from Fuglede's Theorem). For $p = 1$ this statement fails. In [23] there were constructed a compact normal operator N and a compact operator X with $[N, X] \in \mathfrak{S}_1$ and $[N^*, X] \notin \mathfrak{S}_1$. This answers a question of Weiss [42]. Moreover in [24] there was constructed a normal operator S such that for each $p > 1$ there is $X \in \mathfrak{S}_p$ with $[N, X] \in \mathfrak{S}_1$ and $[N^*, X] \notin \mathfrak{S}_1$.

Now we consider the extensions of the above results to "long"multiplication operators (the left parts of linear operator equations considered in the previous section).

Theorem 12. [43] *Let $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, ..., B_n)$ be commutative n-tuples of normal operators. Then*

$$\|\sum_{k=1}^{n} A_k X B_k\|_2 = \|\sum_{k=1}^{n} A_k^* X B_k^*\|_2 \tag{5.4}$$

for each operator X such that both parts of the equality are finite.

The result is nice but the last condition is quite restrictive. Indeed one can not even say that Theorem 12 extends Fuglede Theorem: to deduce from $AX - XA = 0$ that $A^*X - XA^* = 0$ one needs to know that $A^*X - XA^* \in \mathfrak{S}_2$ (of course one needn't it if uses Theorem 11).

The following result from [40] is free of this restriction. Most of the previous results can be obtained as its consequence.

Theorem 13. *If Hausdorff dimension $d(\mathbb{A})$ of the joint spectrum $\sigma(\mathbb{A})$ of the family $\mathbb{A}$ does not exceed 2, then the equality (5.4) holds for each operator X.*

For the proof we will briefly present a part of the theory of approximate inner intertwinings; a transparent exposition can be found in [40].

Let $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ be topological vector spaces and $\Phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ a continuous imbedding with dense range. Let S and T be operators that act in $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ respectively and are intertwined by Φ: $T\Phi = \Phi S$. A net of linear mappings $F_\alpha : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ is called an approximate inner intertwining (AII, for short), if $F_\alpha \Phi \to 1_{\mathfrak{X}}$, $\Phi F_\alpha \to 1_{\mathfrak{Y}}$ and $F_\alpha T - SF_\alpha \to 0_{\mathfrak{X}}$ in the topology of simple convergence.

Surprisingly, in this general situation it is possible to establish some non-trivial facts. We will need here only two of them:

Theorem 14. *Let $\mathfrak{X}$ be a Hilbert space $\mathcal{H}$ with the weak topology, S - a normal operator on $\mathcal{H}$, S^* - its adjoint. Let $\Phi : \mathcal{H} \to \mathfrak{Y}$ intertwine S and S^* with operators T_1 and T_2 respectively. If there is a common AII for both (S, T_1) and (S^*, T_2) then*
(i) $T_1^{-1}(\Phi(\mathcal{H})) = T_2^{-1}(\Phi(\mathcal{H}))$
and
(ii) for each $y \in T_1^{-1}(\Phi(\mathcal{H}))$,

$$\|\Phi^{-1}T_1 y\| = \|\Phi^{-1}T_2 y\|. \tag{5.5}$$

In the situation of Theorem 13, $\mathcal{H}$ is the space $\mathfrak{S}_2$ of Hilbert-Schmidt operators, $\mathfrak{Y} = B(H)$, Φ is the identity imbedding of $\mathfrak{S}_2$ to $B(H)$, $T_1 = \Gamma$, $T_2 = \widetilde{\Gamma}$, S is the restriction of Γ to $\mathfrak{S}_2$. The assumption $d(\mathbb{A}) \leq 2$ allows to construct an AII. It has the form $F_\alpha(X) = [X, P_\alpha]$, where P_α is a net of finite rank projections constructed via appropriate partitions of $\sigma(\mathbb{A})$. Now to prove Theorem 13 it remains only to notice that (5.5) in this case coincides with (5.4).

Let us temporarily denote, for any linear topological space $\mathfrak{X}$, by $\mathfrak{X}^*$ the space of all *antilinear* functionals on $\mathfrak{X}$, so that $\mathcal{H}^*$ can be identified with $\mathcal{H}$. Similar notation is used for adjoints of linear operators between spaces. Thus for $\Phi : \mathcal{H} \to \mathfrak{Y}$ one has $\Phi^* : \mathfrak{Y}^* \to \mathcal{H}$ and one can define the operator $\Phi\Phi^* : \mathfrak{Y}^* \to \mathfrak{Y}$. If Φ intertwines an operator $S \in B(\mathcal{H})$ with $T_1 \in B(\mathfrak{Y})$ and S^* with $T_2 \in B(\mathfrak{Y})$ then $\Phi\Phi^*$ intertwines T_1^* with T_2. By definition, a net $F_\alpha : \mathfrak{Y} \to \mathcal{H}$ is a *-AII for (S, T_1, T_2) if $F_\alpha^* F_\alpha$ is an AII for the pair T_1^*, T_2.

Theorem 15. *If a triple (S, T_1, T_2) admits *-AII then the range of T_1 has trivial intersection with the kernel of T_2*

This result will be used in Section 7.

6. Operator Lipschitz functions

One can say that $N^* = h(N)$ where h is the function on $\mathbb{C}$ defined by $h(z) = \overline{z}$. So a natural question is: which functions share with h all (or some) properties established in the previous sections.

Let us formulate the problem in a more precise form.

For which continuous functions f, defined on a subset $\alpha \subset \mathbb{C}$, the following statements are true for each normal operator N with $\sigma(N) \subset \alpha$:
(i) if N commutes with an operator X then $f(N)$ commutes with X;
(ii) if $NX - XN \in \mathfrak{S}_p$ then $f(N)X - Xf(N) \in \mathfrak{S}_p$ (where $p \in [1; \infty]$ is fixed);
(iii) moreover, the inequality

$$\|f(N)X - Xf(N)\|_p \leq C\|NX - XN\|_p \tag{6.1}$$

holds?

The answer to the question (i) is easy: for any f.

Indeed, the set of all f satisfying (i) is a closed algebra of functions on α; it evidently contains $f(t) = t$ and, by Fuglede Theorem, contains $h(t)$. Hence it coincides with $C(\alpha)$ by Stone-Weiershtrass Theorem.

The classes of functions satisfying (ii) and (iii) coincide for $p \in [1; \infty)$ [23]. For $p = \infty$ all continuous functions satisfy (ii) (it suffices to apply (i) to the Calkin algebra $B(H)/K(H)$) but (iii) holds only for Operator Lipschitz functions (see below).

The functions satisfying (iii) are called $\mathfrak{S}_p$-Lipschitz because they are equivalently characterized [23] by the following property:

$$\|f(M) - f(N)\|_p \leq C\|M - N\|_p \tag{6.2}$$

for all normal operators M, N with spectra in α. Here the constant C depends on f and α. We know from Theorem 11 that the function h belongs to this class (for $p \in (1; \infty)$). A complete description of this class is unknown even in the (intensively studied) case that α is a subinterval of $\mathbb{R}$.

Problem 3. Is any Lipschitz function on an interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $\mathfrak{S}_p$-Lipschitz for $p \in (1; \infty)$)?

The answer is known only for $p = 2$. It is positive, and in this case we needn't restrict α - it again can be arbitrary compact subset of $\mathbb{C}$). The proof is similar to the proof of the Weiss's formula (5.3). First of all it follows easily from Spectral Theorem that if A, B are commuting normal operators on a Hilbert space $\mathcal{H}$ then for any Lipschitz function f and any vector $x \in \mathcal{H}$, one has $\|(f(A) - f(B))x\| \leq C\|A - B)x\|$. Applying this to the operators of left multiplication by M and right multiplication by N on the space of Hilbert-Schmidt operators, we obtain the inequality

$$\|f(M)X - Xf(N)\|_2 \leq C\|MX - XN\|_2$$

for all Hilbert-Schmidt operators X. Then deduce this for all $X \in B(H)$ using the approximate inverse intertwining. At last set $X = 1$.

The problem on the smoothness conditions that provide the validity of (6.2) is of big importance for applications in spectral theory (scattering theory, phase shift, spectral distributions). The first step was done in the paper of Daleckii and Krein [8] who proved that (6.2) holds if $f \in C^2[a, b]$. Birman and Solomyak in their famous cycle of publications (see [33] and references therein) developed the powerful technique of double operator integrals and considerably weakened the restrictions. The best result on this way belongs to Peller [27] who proved that it suffices that f belongs to the Besov's space $B^1_{1,\infty}$. Moreover he proved that for $p = 1$ (or equivalently for $p = \infty$) it is *necessary* that $f \in B^1_{1,1}$.

To see the idea of the proof and the relation of the topic with Schur multipliers, note that if f is sufficiently smooth then its *divided difference* $\hat{f}(t, s) = \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ can be decomposed into a sum (in [27] -integral) of products:

$$\hat{f}(t, s) = \sum u_k(t)v_k(s) \tag{6.3}$$

with

$$\sum_k \|u_k\|\|v_k\| = C < \infty$$

where $\|.\|$ denotes the norm in $C[a, b]$. Hence for any hermitian operators M, N with spectra in $[a, b]$ and any operator X, one can naturally define the operator $F(X) = \sum_{k=1} u_k(M)Xv_k(N)$ and

$$\|F(X)\| \leq C\|X\|. \tag{6.4}$$

It follows easily from the equality $f(t) - f(s) = \hat{f}(s, t)(t - s)$, applied to the multiplication operators L_M, R_N, that $f(M)X - Xf(N) = F(MX - XN)$. Therefore

$$\|f(M)X - Xf(N)\| \leq C\|MX - XN\|. \tag{6.5}$$

Here $\|.\|$ can be the operator norm or $\mathfrak{S}_p$-norm as well. The inequality (6.5) implies (6.1) (take $M = N$) and (6.2) (take $X = 1$).

The condition (6.4) shows that function $\hat{f}(t, s)$ is a Schur multiplier. Indeed if M, N are diagonal operators with eigenvalues λ_i and μ_j, then the matrix $(y_{i,j})$ of the operator $F(X)$ is equal to the Hadamard-Schur product of the matrix $(\hat{f}(\lambda_i, \mu_j))$ and the matrix (x_{ij}) of X:

$$y_{ij} = \hat{f}(\lambda_i, \mu_j)x_{ij}$$

for all i, j.

Similarly if M, N are realized as multiplication operators in L_2-spaces then for each Hilbert Schmidt operator X, the integral kernel $y(t, s)$ of $F(X)$ is equal to $\hat{f}(t, s)x(t, s)$, where $x(t, s)$ is the integral kernel of X.

Using the interpolation theory for Hadamard multipliers one can show that the validity of (6.2) for some $p = p_1$ implies its validity for all p in the interval $(p_1, p_1/(p_1 - 1))$. In particular the most narrow one is the class of functions satisfying (6.2) for $p = 1$ (or for $p = \infty$, that is for the operator norm); they are called *Operator Lipschitz* functions. This class is also most important for applications. Among various results on Operator Lipschitz functions (see for example [21, 22, 23]) we mention only the following:

Theorem 16. *A function is Operator Lipschitz on a compact $\alpha \subset \mathbb{C}$ if and only if for any normal operator N with $\sigma(N) \subset \alpha$, the range of the map $X \to f(N)X - Xf(N)$ is contained in the range of the map $X \to NX - XN$*

This result was (in equivalent form) obtained in [18].

An important property of "operator smoothness"is the existence of Gatouex (or Frechet - this is equivalent!) derivative of the map $X \to f(X)$. Such functions are called Operator Differentiable. It was proved in [22] that this class is very close to the class of Operator Lipschitz functions: the space (OD) of Operator Differentiable functions on an open interval coincides with the closure of polynomials in the space of Operator Lipschitzian functions (both spaces have natural locally convex topologies; the result guarantees the coincidence of the topologies on (OD)).

7. Non-commutative version

Let $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n)$, $\mathbb{B} = (B_1, ..., B_n)$ be arbitrary n-tuples of operators. We denote by Γ and $\widetilde{\Gamma}$ respectively the multiplication operators $X \to \sum_{k=1}^n A_k X B_k$ and $X \to \sum_{k=1}^n A_k^* X B_k^*$. Up to now we considered only the case when $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ consisted of commuting normal operators, and proved that under some conditions Γ and $\widetilde{\Gamma}$ shared some properties with a normal operator N on a Hilbert space and its adjoint N^* ($\ker\Gamma = \ker\widetilde{\Gamma}$, or $\|\Gamma(X)\| = \|\widetilde{\Gamma}(X)\|$). Note that the equality $\ker(N) = \ker(N^*)$ is a consequence of the equality $\ker(N^*N) = \ker(N)$ which holds for an arbitrary operator on Hilbert space. So it is natural to look for the conditions under which the equality

$$\ker(\widetilde{\Gamma}\Gamma) = \ker(\Gamma) \tag{7.1}$$

holds. Clearly (7.1) implies $\ker\Gamma = \ker\widetilde{\Gamma}$ for normal families, so it could be considered as a natural non-commutative version of generalized Fuglede theorem.

Let us say that an n-tuple $\mathbb{A}$ is *p-semidiagonal* if there is an increasing to 1 sequence P_n of finite-dimensional projections satisfying the condition $\|[P_n, A_k]\|_p \leq C$ for some $C > 0$.

Examples:

1. Any family of operators with matrices (in some basis) supported by a finite number of diagonals (this means that $a_{ij} = 0$ if $|i - j| > m$ for some $m \in \mathbb{N}$) is 1-semidiagonal. More concrete class of examples: arbitrary families of weighted shifts.

2. Any family of operators which belongs to the algebra of operators on $L_2(\mathbb{T})$, generated by shifts $f(t) \to f(t - \theta)$ and multiplication operators by smooth (twice differentiable) functions, is 1-semidiagonal.

3. A commutative family $\mathbb{A}$ of normal operators with $d(\mathbb{A}) \leq p$ is p-semidiagonal.

4. A family $\mathbb{A}$ consisting of one hyponormal operator of finite multiplicity is 2-semidiagonal.

If one takes into account that a perturbation of a 1-semidiagonal family by a family of nuclear operators is also 1-semidiagonal, then it is clear that the class of such families is quite wide.

Theorem 17. [40] *If one of the coefficient n-tuples $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ is 1-semidiagonal then (7.1) is true.*

The main idea in the proof is that setting $F_n(X) = [P_n, X]$ one obtains a *-AII for the triple (S, T_1, T_2) where $T_1 = \Gamma$, $T_2 = \widetilde{\Gamma}$ and S is the restriction of Γ to $\mathcal{H} = \mathfrak{S}_2$. Applying Theorem 15 we get that $\Gamma(B(H)) \cap \ker\widetilde{\Gamma} = 0$ which is the same as (7.1).

Unfortunately this result doesn't allow to deduce Fuglede Theorem as a direct corollary: in the classical situation $\mathbb{A} = \{N, 1\}$, and $d(\mathbb{A}) = dim(\sigma(N))$ can be more than 1, so $\mathbb{A}$ needn't be 1-diagonal.

Problem 4. Is this possible to prove (7.1) in assumption that *both* coefficient families are 2-semidiagonal?

But of course Theorem 17 implies the statement of Theorem 13 for the case that $d(\mathbb{A}) \leq 1$. Moreover it has other important consequences.

Corollary 5. *If $\mathbb{A}$ is 1-semidiagonal and $\widehat{\Gamma}\Gamma(X) \in \mathfrak{S}_1$ then $\Gamma(X) \in \mathfrak{S}_2$. If, in addition, X is compact then*

$$\|\Gamma(X)\|_2^2 = trace(X^*\widehat{\Gamma}\Gamma(X)). \tag{7.2}$$

Note that (7.2) converts into (5.4) in the case of normal families.

Corollary 6. *Let A be a hyponormal operator and B be a cohyponormal one ($\|Bx\| \leq \|B^*x\|$ for all x). Then*

$$\|AX - XB\|_2 \geq \|A^*X - XB^*\|_2 \tag{7.3}$$

for each operator X.

The inequality (7.3) was proved earlier (see [11] and numerous references in it) for subnormal operators and also for hyponormal ones but under the condition that $X \in \mathfrak{S}_2$.

The following interesting question is still open:

Problem 5. Let A, X be arbitrary operators. Suppose that $AX - XA$ commutes with A^*. Does it follow that $AX = XA$?

Clearly it is equivalent to the validity of (7.1) for $\Gamma(X) = AX - XA$. The positive answer was known for the case that A is a weighted shift [17] or a subnormal operator [44]. Theorem 17 shows that the answer is positive for all 1-semidiagonal A.

Another "non-commutative"version of Fuglede Theorem was obtained by E.A.Gorin [6]. In a simplest form it can be formulated as follows.

Let $\mathcal{F}_2$ be the free algebra with generators a, b. Consider the formal power series $f(z) = \exp(za)\exp(zb)$ with coefficient in $\mathcal{F}_2$. Then there is a formal power series $g(z)$ with coefficients in $\mathcal{F}_2$ such that $f(z) = \exp(g(z))$. Let us denote by $c_k(a, b)$ the coefficients of this power series:

$$g(z) = c_0(a, b) + c_1(a, b)z + \ldots$$

It is easy to obtain explicit formulas for $c_k(a, b)$ for small k. For example $c_0(a, b) = 1$, $c_1(a, b) = a + b$, $c_2(a, b) = [a, b]/2$.

Since $c_k(a, b)$ are elements of $\mathcal{F}_2$ ("non-commutative polynomials"), one can calculate $c_k(A, B)$ for each pair A, B of elements of any algebra.

Theorem 18. *Let T, S - operators on a Banach space $\mathfrak{X}$ such that T satisfies (2.4), S has real spectrum, and let $X \in B(\mathfrak{X})$. If $[c_k(T, iS), X] = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$ then $[T, X] = [S, X] = 0$.*

This theorem extends Corollary 1. Indeed if $[a, b] = 0$ then $c_k(a, b) = 0$ for all $k \geq 2$. Hence in this case the assumption becomes just $[c_1(a, ib), x] = 0$, that is $a + ib$ commutes with x.

8. Fuglede Theorem for derivations

Let $\mathcal{A}$ be a subalgebra of an algebra $\mathcal{B}$. Recall that a derivation of an algebra $\mathcal{A}$ with values in $\mathcal{B}$ is a linear map $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, satisfying the Leibnitz rule:

$$\delta(a_1 a_2) = a_1\delta(a_2) + \delta(a_1)a_2.$$

An important example is an inner derivation δ_c, where $c \in \mathcal{B}$; it acts by the rule $\delta_c(a) = ca - ac$.

We will consider derivations on the algebra $B(H)$ or its subalgebras with values in $B(H)$. The Fuglede Theorem can be rewritten in the form

$$\ker(\delta_N) = \ker(\delta_{N^*}) \tag{8.1}$$

for each normal operator N. Another version is:

$$\delta_X(N) = 0 \Longrightarrow \delta_X(N^*) = 0 \tag{8.2}$$

if N is normal. Surprisingly these results admit extension to general derivations. Moreover some qualitative versions also can be extended in this way.

In the following result no topological restrictions on a derivation are imposed.

Theorem 19. [34] *Let δ be a derivation of a *-algebra $\mathcal{A} \subset B(H)$ with values in $B(H)$. Let $N \in \mathcal{A}$ be a normal operator without eigenvalues. If $\delta(N) \in \mathfrak{S}_p$ and $\delta(N^*)$ is compact then $\delta(N^*) \in \mathfrak{S}_p$ and*

$$\|\delta(N^*)\|_p \leq c(p)\|\delta(N)\|_p \tag{8.3}$$

where $c(p)$ is the constant defined in Theorem 11.

For bounded derivations most restictions can be removed:

Theorem 20. [24] *If δ is a bounded derivation of a *-algebra $\mathcal{A} \subset B(H)$ with values in $B(H)$ then (8.3) holds for each normal operator $N \in \mathcal{A}$ without eigenvalues.*

These results extend (8.2). To catch (8.1) we introduce the following definition: a derivation δ of a *-algebra is called *normal* if it commutes with δ^*, where δ^* is defined by the rule $\delta^*(a) = \delta(a^*)^*$.

Theorem 21. *If δ is a bounded normal derivation of a C*-algebra then* $\ker(\delta) = \ker(\delta^*)$.

For the proof it is convenient to pass to second conjugate operators - they are bounded derivations on a W*-algebra. Then one can use the Kadison-Sakai Theorem, which states that such derivations are inner, and apply the Fuglede Theorem.

The next theorem is a partial analog of Theorem 16:

Theorem 22. [24] *Suppose that $\mathcal{A}$ is a C*-algebra, δ and δ_1 are its derivations and δ is normal. If $\delta_1(\mathcal{A}) \subset \delta(\mathcal{A})$ then*
(i) δ_1 is normal and commutes with δ;
(ii) $\|\delta_1(a)\| \leq C\|\delta(a)\|$ for all $a \in \mathcal{A}$.

One can also extend the results of Section 6 to general bounded derivations:

Theorem 23. [24] *Let N be a normal operator without eigenvalues and $\delta : \mathcal{A} \to B(H)$ a bounded derivation of a C*-algebra $\mathcal{A}$, containing N. If f is a $\mathfrak{S}_p$-Lipschitz function on $\sigma(N)$ then*

$$\|\delta(f(N))\|_p \leq D\|\delta(N)\|_p \tag{8.4}$$

for each $p \in [1;\infty]$, where the constant D depends on f only.

The most natural topological condition on a derivation is not a boundedness, but closeness (see [30] for numerous important examples of closed derivations of operator algebras).

Theorem 24. [34] *Let $\delta : \mathcal{A} \to B(H)$ be a closed derivation. If, for some normal operator N without eigenvalues, $\delta(N) \in \mathfrak{S}_2$ and $\delta(N^*) \in \mathfrak{S}_2$ then $f(N) \in \mathcal{A}$ for each Lipschitz function f on $\sigma(N)$. Moreover*

$$\|\delta(f(N))\|_2 \leq C\|\delta(N)\|_2 \tag{8.5}$$

where C is the Lipschitz constant of f.

References

[1] A.Abdessemed and E.B.Davies, *Some commutaror estimates in the Shatten classes*, J.London Math. Soc.(2) 37 (1989), 299-308

[2] B.Aupetit and D.Drissi, *Some spectral inequalities involving generalized scalar operators*, Studia Math., 109(1994), 51-66

[3] B.A.Barnes, *Operators which satisfy polynomial growth conditions*, Pacific J. Math., 1987, 209-219

[4] K.Boyadziev,*Commuting C_0-groups and the Fuglede-Putnam theorem*, Stud. Math. 81(1985), no 3, 303-306

[5] I.Tz.Gohberg, M.G.Krein, *Theory of Volterra operators in Hilbert space, and its applications*, "Nauka", Moscow, 1967

[6] E.A.Gorin, *A generalization of a theorem of Fuglede*, Algebra and Analysis, 5(1993), 83-97

[7] Gorin E.A., Karahanyan M.I., *Asymthotic version of Fuglede-Putnam Theorem on commutators for elements of Banach algebras*, Mathem. Zametki 22(1977), no 2, 179-188

[8] Ju.L.Daletskii and S.G.Krein, *Integration and differentiation of functions of Hermitian operators and applications to the of perturbations*, Am. Math. Soc. Transl. (2) 47 (1965), 1 - 30

[9] H.R.Dowson, *Some properties of prespectral operators*, Proc. Roy. Irish Acad., 74(1974), 207-221

[10] N.Danford, J.Schwartz, *Linear operators, Part III*, W-I, N-Y, Sidney, Toronto, 1971

[11] M.R.Duggal, *On Fuglede-Weiss theorem*, Indiana Univ. Math. J. 36(1987), 526-534

[12] E.B.Davies, *Lipschitz cintinuity of functions of operators in the Shatten Classes*, J. London Math. Soc. 37(1988), 148-157

[13] C.K.Fong, *On normal operators on Banach spaces*, Glasgow Math. J. 20(1979), 163-168

[14] B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1950), 35-40

[15] P.Halmos, *A Hilbert space problem book*, van Nostrand, Toronto-London, 1967

[16] E.Hille and R.S.Phillips, *Functional analysis and semugroups*, Amer. Math. Soc., Providence, 1957

[17] Y. Ho, *Commutants and derivation ranges*, Tohoku Math. J., 1975, 27, 509-514

[18] B.E.Johnson and J.P.Williams, *The range of a normal derivation*, Pacific J. Math., 58(1975), 105-122

[19] S.Kantorovich, *Classification of operators by means of their operational calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. 115(1965), 194-224

[20] V.E.Katznelson, *On a conservative operator of norm equal to the spectral radius*, Math. Issledovaniya, 5(1970), no 3, 186-189

[21] E.Kissin and V.S.Shulman, *Classes of operator-smooth functions, I. Operator-Lipschitz functions*, Proc. Edinb. Math. Soc. 48 (2005), 151-173

[22] E.Kissin and V.S.Shulman, *Classes of operator-smooth functions, II. Operator-Differentiable functions*, Integr. Equat. Oper. Theory 49(2004), 165-210

[23] E.Kissin and V.S.Shulman, *Classes of operator-smooth functions, III. Stable functions and Fuglede ideals*, Proc. Edinb. Math. soc. 48(2005), 175-197

[24] E.Kissin and V.S.Shulman, *On the range inclusions of normal derivations: variations on a theme by Johnson, Williams and Fong*, Proc. London Math. Soc. (3) 83(2001), 176-198

[25] E.Kissin and V.S.Shulman, *On a problem of J.P.Williams*, Proc. Amer. Math. Soc. 130(2002), 3605-3608

[26] J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperation und Theorie der normalen Operatoren*, Math. Ann., 102(1929), 370-427

[27] V.V.Peller, *Hankel operators in perturbation theory of unitary and selfadjoint operators*, Func. Anal. and applic., 19(1985), 37-51

[28] C. Putnam, *On normal operators on Hilbert space*, Amer. J. Math. 73(1951), 357-362

[29] M. Rosenblum, *On a theorem of Fuglede and Putnam*, J. London Math. Soc., 33(1958), 376-377

[30] S. Sakai, *Operator algebras in dynamical systems*, CUP, Cambridge, New York, 1991

[31] Yu.S.Samoilenko, V.S.Shulman, L.B.Turowska , *Semilinear relations and their *-representations*, Methods Fumct. Anal. Topology 2(1996), no. 1, 55-111

[32] A.M.Sinclair, *The norm of a Hermitian element in a Banach algebra*, Bull London Math. Soc., 28(1971), 446-450

[33] M.Z.Solomyak, *Double Operator Integrals in a Hilbert Space*, Integr. Equat. Oper. Theory, 47(2003), 131-168

[34] V.S.Shulman, *Some remarks on Fuglede-Weiss Theorem*, Bull. London Math. Soc. 28(1996), 385-392

[35] V.S.Shulman, *Spectral synthesis and Fuglede-Putnam-Rosenblum Theorem*, Theory of functions, functional analysis and their applications, 54(1990, 26-36.

[36] V.S.Shulman, *Intertwinings and linear operator equations*, Doklady AN SSSR, 301(1988), no 1, 57-61

[37] V.S.Shulman, *Multiplication operators and traces of commutators*, Investigations on linear operators and the theory of functions, XIII, Zap.LOMI 135(1984), 182-194

[38] V.S.Shulman, *Multiplication operators and spectral synthesis*, Doclady AN SSSR, 313(1990), no 5, 1047-1051.

[39] V.S.Shulman, *Linear operator equations with normal coefficients*, Doklady AN SSSR, 270(1983), no. 5, 1070-1073

[40] V.S.Shulman, L.B.Turowska, *Operator synthesis II: Individual synthesis and linear operator equations*, J.Reine Angew Math. 590(2006), 143-187

[41] N.Th.Varopoulos, *Tensor algebras and harmonic analysis*, Acta Math., 119(1967), 51-112

[42] G.Weiss, *The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions for matrix operators. I*, Trans. Amer.Math.Soc 246(1978), 193-209

[43] G.Weiss, *The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions for matrix operators. II*, J.Oper.Theory 5(1981), no.1, 3-16

[44] J.P.Williams, *Derivation ranges: open problems*, "Top. modern Theory", 5 Int. Conf. Oper. Theory, Timisoara and Herculane, 1980

ON PERIODIC OPERATORS

M. Bekker[1]
University of Missouri,
Rolla, MO, USA

E. Tsekanovskii
Niagara University,
Niagara Falls, NY, USA

1. Introduction

In this paper we consider the so called $(U,b)-$periodic symmetric operators with finite and equal defect numbers and their $(U,b)-$periodic self-adjoint extensions. We establish that $(U,b)-$periodic symmetric operator $\mathcal{H}$ with defect indices $(1,1)$ admits $(U,b)-$periodic self-adjoint extension H if and only if the corresponding Weyl-Titchmarsh function of the pair $(\mathcal{H},H)$ is periodic with the period b. From this result we derive the classical Stone-von Neumann theorem for two unitary groups of operators satisfying the commutative relation of Quantum Mechanics in Weyl's form.

2. The Weyl-Titchmarsh function.

Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space, and let $\mathcal{H}$ be a densely defined prime symmetric operator in $\mathfrak{H}$, that is, $\mathfrak{H}$ does not contain a proper subspace that reduces $\mathcal{H}$, and in which $\mathcal{H}$ induces a self-adjoint operator. Let $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$, $(\overline{\mathfrak{D}(\mathcal{H})} = \mathfrak{H})$, be the domain of $\mathcal{H}$. We assume that the defect index of $\mathcal{H}$ is (m,m), $m<\infty$, that for any non-real z $\dim\mathfrak{N}_z = [(\mathcal{H}-\bar{z}I)\mathfrak{D}(\mathcal{H})]^{\perp} = m$. Let H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$ in $\mathfrak{H}$ (an orthogonal extension) with domain $\mathfrak{D}(H)$. The Weyl-Titchmarsh function of the pair $(\mathcal{H},H)$, $M_{\mathcal{H},H}(z)$, is an operator-valued function whose values are operators on the $m-$dimensional space $\mathfrak{N}_i$. $M_{\mathcal{H},H}(z)$ is defined on the resolvent set $\rho(H)$ of the operator H by

$$M_{\mathcal{H},H}(z) = P_+(zH+I)(H-zI)^{-1}|_{\mathfrak{N}_i} \tag{2.1}$$

where P_+ is the orthogonal projection from $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{N}_i$. From the spectral representation of H, it follows that $M_{\mathcal{H},H}(z)$ can be written as

$$M_{\mathcal{H},H}(z) = \int\limits_R \frac{\lambda z+1}{\lambda - z} d\sigma(\lambda). \tag{2.2}$$

Values of a nondecreasing function $\sigma(\lambda)$ are operators on $\mathfrak{N}_i$, and are defined by $\sigma(\lambda) = P_+E(\lambda)|_{\mathfrak{N}_i}$, where $E(\lambda)$ is the resolution of identity associated with H. We normalize $E(\lambda)$ by the condition $E(\lambda) = 1/2(E(\lambda+0)+E(\lambda-0))$. It is evident that $M_{\mathcal{H},H}(z)$ is analytic on $\rho(H)$, particularly, for $\Im z \neq 0$, and from (2.2) it follows that $\Im M_{\mathcal{H},H}(z) \geq 0$ for $z \in \mathbb{C}_+$. Therefore, $M_{\mathcal{H},H}(z)$ belongs to the Heglotz-Nevalinna class.

The function σ has the following properties:

$$\int\limits_R d\sigma(\lambda) = I_{\mathfrak{N}_i}; \tag{2.3}$$

$$\int\limits_R (1+\lambda^2)(d\sigma(\lambda)h,h) = \infty \qquad \forall h \in \mathfrak{N}_i, \tag{2.4}$$

where $\sigma(\lambda) = 1/2(\sigma(\lambda+0)+\sigma(\lambda-0))$. Condition (2.3) is obvious, while condition (2.4) follows from the fact, that according to the von Neumann's formulas, for vector $h \in \mathfrak{N}_i$, $h \notin \mathfrak{D}(H)$. Condition (2.3) provides a normalization condition for the Weyl-Titchmarsh function: $M_{\mathcal{H},H}(i) = iI_{\mathfrak{N}_i}$. From condition (2.4) it follows that points of growth of σ form a noncompact set.

Upon selecting an orthonormal basis in $\mathfrak{N}_i$ we can identify the space $\mathfrak{N}_i$ with $\mathbb{C}^m$, and regard $M_{\mathcal{H},H}(z)$ and $\sigma(\lambda)$ as operators on $\mathbb{C}^m$. Matrices of these operators, with respect to the selected basis, are also denoted by $M_{\mathcal{H},H}(z)$ and $\sigma(\lambda)$.

[1]Research of this author was partially supported by Missouri Research Board, Grant No1275

For proofs of the following two theorems we refer readers to our article [2].

Theorem 1. *Let $\mathcal{H}$ and $\tilde{\mathcal{H}}$ be prime symmetric operators with equal defect numbers in Hilbert spaces $\mathfrak{H}$ and $\tilde{\mathfrak{H}}$ respectively, and H and $\tilde{H}$ be their self-adjoint extensions. Suppose that there is the unitary operator $W : \mathfrak{H} \to \tilde{\mathfrak{H}}$ such that $W\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}W$ and $WH = \tilde{H}W$. Then there is a unitary operator $W_0 : \mathfrak{N}_i \to \tilde{\mathfrak{N}}_i$ such that $W_0 M_{\mathcal{H},H}(z) = M_{\tilde{\mathcal{H}},\tilde{H}}(z)W_0$.*

The next Theorem is a statement about realization. It provides the functional model of a pair with prescribed Weyl-Titchmarsh function.

Theorem 2. *Let $F(z)$ be a function whose values are linear operators on the $m-$dimensional space $\mathfrak{N}$, and which admits integral representation*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda z + 1}{\lambda - z} d\sigma(\lambda)$$

where $\sigma(\lambda)$ is a nondecreasing function with values on the set of linear operators on $\mathfrak{N}$, and which satisfies (2.3) and (2.4). Then, there exist a Hilbert space $\tilde{\mathfrak{H}}$ which contains $\mathfrak{N}$ as a subspace, prime symmetric operator $\tilde{\mathcal{H}}$ with defect index (m, m), and self-adjoint extension $\tilde{H}$ in $\tilde{\mathfrak{H}}$, such that $F(z) = M_{\tilde{\mathcal{H}},\tilde{H}}(z)$. If $(\hat{\mathfrak{H}}, \hat{\mathcal{H}}, \hat{H})$ is another realization of F, then there is a unitary operator $\Psi : \tilde{\mathfrak{H}} \to \hat{\mathfrak{H}}$ such that $\Psi\tilde{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}\Psi$, and $\Psi\tilde{H} = \hat{H}\Psi$.

Remark. Conditions (2.3) and (2.4) are understood now with $\mathfrak{N}$ instead of $\mathfrak{N}_i$.

The space $\tilde{\mathfrak{H}}$ is $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{N}, d\sigma)$. Elements of $\tilde{\mathfrak{H}}$ are measurable functions $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, with values in $\mathfrak{N}$ such that

$$\int_R (d\sigma(\lambda)f(\lambda), f(\lambda))_{\mathfrak{N}} < \infty.$$

The space $\mathfrak{N}$ is identified with the subspace of $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{N}, d\sigma)$ which consists of constant functions. The orthogonal resolution of identity $\tilde{E}$ is defined as $\tilde{E}(\Delta)f(\lambda) = \chi_\Delta(\lambda)f(\lambda)$, where χ_Δ is the indicator function of the set Δ.

The self-adjoint operator $\tilde{H}$ is defined as follows:

$$\mathfrak{D}(\tilde{H}) = \{f \in \tilde{\mathfrak{H}} | \int_R (1 + \lambda^2)(d\sigma(\lambda)f(\lambda), f(\lambda))_{\mathfrak{N}} < \infty\}, \tag{2.5}$$

$$(\tilde{H}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad f \in \mathfrak{D}(\tilde{H}). \tag{2.6}$$

From (2.4) it follows that $\tilde{H}$ is an unbounded operator.

Let

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}}) = \{f \in \mathfrak{D}(\tilde{H}) | \int_R (\lambda + i)d\sigma(\lambda)f(\lambda) = 0\}, \tag{2.7}$$

and

$$(\tilde{\mathcal{H}}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda), \qquad f \in \mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}}). \tag{2.8}$$

$\mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}})$ is a linear manifold, dense in $\tilde{\mathfrak{H}}$ (this fact follows from (2.4)), and $(\tilde{\mathcal{H}}f, g) = (f, \tilde{\mathcal{H}}g)$ for $f, g \in \mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}})$. Thus, $\tilde{\mathcal{H}}$ is a symmetric operator. Moreover, condition (2.7) implies, that $\mathfrak{N} = [(\tilde{\mathcal{H}}+iI)\mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}})]^\perp = \mathfrak{N}_i$. Indeed, for $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{N}, d\sigma)$ put $f_0 = \int d\sigma(\lambda)f$. Then we have $f = (\lambda + i)g + h$, where $g = (f - f_0)/(\lambda + i) \in \mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{H}})$, $h = f_0 \perp (\lambda + i)g$. Therefore, one of the defect numbers of $\tilde{\mathcal{H}}$ is m. It is easily seen that $\mathfrak{N}_{-i} = \{(\lambda - i)(\lambda + i)^{-1}\xi | \xi \in \mathfrak{N}\}$, which means that $\dim \mathfrak{N}_{-i} = m$, and the defect index of $\tilde{\mathcal{H}}$ is (m, m). In general, for arbitrary nonreal z the defect subspace is $\mathfrak{N}_z = \{(\lambda - i)(\lambda - z)^{-1}\xi | \xi \in \mathfrak{N}\}$.

The Weyl-Titchmarsh function for the pair $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{H})$ is

$$M_{\tilde{\mathcal{H}},\tilde{H}} = P_+(zH + I)(H - zI)^{-1}|_{\mathfrak{N}_i} = \int_R \frac{z\lambda + 1}{\lambda - z} d\sigma(\lambda)$$

and coincides with the given function F.

Slightly different version of the functional model for symmetric operators with finite and equal defect numbers that was described in this section was published for the first time in [4].

3. Periodic Operators

. **Definition.** Let $\mathcal{H}$ be a densely defined prime symmetric operator. We say that operator $\mathcal{H}$ is periodic (more precisely, $(U,b)-$periodic) if there exists a unitary operator U such that:

(1) The domain $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ of operator $\mathcal{H}$ is transformed by operator U onto itself, that is
$$U\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \mathfrak{D}(\mathcal{H}). \tag{3.1}$$

(2) For any vector $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})$ the following equality is fulfilled
$$U\mathcal{H}f = (\mathcal{H} - bI)Uf \tag{3.2}$$
where b is some (fixed) real number.

Suppose that operator $\mathcal{H}$ has equal defect numbers and H is a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$ in $\mathfrak{H}$. We say that operators $\mathcal{H}$ and H form a $(U,b)-$periodic pair, if they are both $(U,b)-$periodic.

Directly from Definition it follows that if $\mathcal{H}$ is a $(U,b)-$symmetric operator then $U\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_{z+b}$. Suppose that $\mathcal{H}$ has equal defect numbers and let H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$. It is well known (see, for example [5]) that for any nonreal z and ζ the operator $(H - zI)(H - \zeta I)^{-1}$ maps $\mathfrak{N}_z$ onto $\mathfrak{N}_\zeta$. Therefore operator
$$\mathcal{B} = (H - (i+b)I)(H - iI)^{-1}U|\mathfrak{N}_i \tag{3.3}$$
maps the defect subspace $\mathfrak{N}_i$ onto itself.

A unitary operator U is called *shift-type* operator if the operator $\mathcal{B}$ in (3.3) is of the form $\mathcal{B} = \rho I$, where $|\rho| = 1$. In terms of the functional model described above it means that if $f(\lambda) \in \mathfrak{N}_i$, that is $f(\lambda) = \xi$, $\xi \in \mathbb{C}$, then
$$(Uf)(\lambda) = \rho\frac{\lambda - i}{\lambda - i - b}\xi, \quad |\rho| = 1. \tag{3.4}$$
Theory of $(U,b)-$periodic pairs with unitary operators U of shift-type was developed in [2]. In particular, in [2] was proved the following theorem

Let $\mathcal{H}$ be a densely defined prime symmetric operator with finite and equal defect numbers and let H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$. Then $(\mathcal{H}, H)$ is a $(U,b)-$periodic pair with a shift-type operator U if and only if the Weyl-Titchmarsh function $M_{\mathcal{H},H}(z)$ of the pair satisfies condition
$$M_{\mathcal{H},H}(z) = M_{\mathcal{H},H}(z+b)$$
for any nonreal z.

If we omit the requirement that U is the shift-type operator then it is possible to prove

Theorem 3. [2]. *Let $\mathcal{H}$ be a densely defined prime symmetric operator with finite and equal defect numbers and and let H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$. Then the pair $(\mathcal{H}, H)$ is $(U,b)-$periodic if and only if there exist an invertible operator $\mathcal{B}$ and a self-adjoint operator γ on the defect subscpace $\mathfrak{N}_i$ such that for any nonreal z*
$$M_{\mathcal{H},H}(z+b) = \mathcal{B}^* M_{\mathcal{H},H}(z)\mathcal{B} + \gamma. \tag{3.5}$$
If (3.5) *is fulfilled then operator $\mathcal{B}$ is defined by* (3.3).

Previous theorem can be reformulated in the following equivalent way

Let $\mathcal{H}$ be a densely defined prime symmetric operator with finite and equal defect numbers and and let H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$. Let $\sigma(\lambda)$ be a non-decreasing matrix-valued function defined by equation $\sigma(\lambda) = P_+E(\lambda)|\mathfrak{N}_i$, where $E(\lambda)$ is the resolution of identity of H. Then the pair $(\mathcal{H}, H)$ is $(U,b)-$periodic if and only if for any Borel set Δ
$$\sigma(\Delta) = \mathcal{B}^* \int\limits_{\Delta+b} \frac{\lambda^2+1}{(\lambda-b)^2+1} d\sigma(\lambda)\mathcal{B}. \tag{3.6}$$

In many cases it is convenient to use matrix-valued measure $\tau(\lambda)$ defined as $d\tau(\lambda) = (1+\lambda^2)d\sigma(\lambda)$. Then condition (3.6) can be written as
$$\tau(\Delta) = \mathcal{B}^*\tau(\Delta + b)\mathcal{B}. \tag{3.7}$$

Theorem 4. *Operator $\mathcal{B}$ possesses the following properties:*

---
[2]In more general settings this theorem is established in joint work of authors with K.Makarov [3]

(1) *All eigenvalues of $\mathcal{B}$ are on the unit cirlce.*
(2) *Algebraic multiplicity of each eigenvalue is equal to its geometric multiplicity. In other words a matrix of $\mathcal{B}$ is diagonalizable.*

Proof. Let f be an eigenvector of $\mathcal{B}$ which corresponds to an eigenvalue ρ. Denote by τ_f the scalar measure defined as $\tau_f(\Delta) = (\tau(\Delta)f, f)$. The measure τ_f satisfies condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_f(\lambda)}{1+\lambda^2} = \|f\|^2.$$

Denote by Δ_n the interval $[nb, (n+1)b)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Then, according to (3.7) $\tau_f(\Delta_n) = |\rho|^{-2n}\tau_f(\Delta_0)$. Now we have

$$\infty > \int_0^{\infty} \frac{d\tau_f(\lambda)}{1+\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \frac{d\tau_f(\lambda)}{1+\lambda^2} \geq$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_f(\Delta_n)}{1+(n+1)^2 b^2} \tau_f(\Delta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\rho|^{2n}(1+(n+1)^2 b^2)}.$$

Therefore the last series converges which implies that $|\rho| \geq 1$. Similar arguments being applied to the negative semiaxis give that $|\rho| \leq 1$. Therefore $|\rho| = 1$ which proves the first statement of the theorem.

Suppose that the algebraic multiplicity of ρ is greater than its geometric multiplicity. Then there is vector $g \in \mathfrak{N}_i$ such that $\mathcal{B}f = \rho f$ and $\mathcal{B}g = f + \rho g$. Then $\mathcal{B}^n g = n\rho f + \rho^n g$ and, because $|\rho| = 1$, arguments similar to those above show that the integral $\int_0^\infty \tau_g(\lambda)/(1+\lambda^2)$ diverges. Thus, algebraic multiplicity of eigenvector f is equal to its geometric multiplicity. It completes the proof.

If f is an eigenvector of $\mathcal{B}$ then formula (3.7) gives $\tau_f(\Delta) = \tau_f(\Delta + b)$. But this condition is necessary abd sufficient for the scalar-valued function $M_f(z) = (M_{\mathcal{H},H}(z)f, f)$ to be perioedic with period b (see [2], Lemma 1). It means that operator γ in (3.5) satisfies condition $(\gamma f, f) = 0$. Therefore we proved the following statement:

Theorem 5. *Let $\mathcal{H}$ be a symmetric operator with index of defect $(1,1)$ and H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$. Pair $(\mathcal{H}, H)$ is a $(U,b)-$periodic if and only if the Weyl-Titchmarsh function of the pair is periodic with period b, that is*

$$M_{\mathcal{H},H}(z+b) = M_{\mathcal{H},H}(z), \quad \Im z \neq 0. \tag{3.8}$$

In other words, if $\mathcal{H}$ is a symmetric operator with index of defect $(1,1)$, and the pair $(\mathcal{H}, H)$ is $(U,b)-$periodic, then unitary operator U is shift-type operator. This statement was pointed out in [2] without proof.

Remark. Using the von Neumann formulas [1] one can prove that for $(U,b)-$ periodic pair $(\mathcal{H}, H)$ their Weyl-Titchmarsh function $M_{\mathcal{H},H}(z)$ satisfies (3.8), then any other orthogonal self-adjoint extension of $\mathcal{H}$ is also $(U,b)-$periodic.

4. The Stone-von Neumann Theorem.

Let $\mathcal{H}$ be a $(U,b)-$periodic symmetric operator and H be its periodic self-adjoint extension. Denote by $V(s)$ the unitary group generated by H, that is $V(s) = \exp(isH)$. Then condition of periodicity of H can be written in the form

$$UV(s) = e^{-ibs}V(s)U.$$

Suppose now that the operator $\mathcal{H}$ has index of defect $(1,1)$ and for any real t there exists a unitary operator $U(t)$ such that the pair $(\mathcal{H}, H)$ is $(U(t), t)-$periodic. It means that for all real s and t the following equality is fulfilled:

$$U(t)V(s) = e^{-ist}V(s)U(t). \tag{4.1}$$

From Theorem 5 it follows that (4.1) is equivalent to the flowing condition: the Weyl-Titchmarsh function $M_{\mathcal{H},H}$ of the pair $(\mathcal{H}, H)$ satisfies condition $WF(z+t) = M_{\mathcal{H},H}(z)$ for all real t. Thus, being analytic for nonreal z this function is constant in the each half-plane. From the normalization condition we obtain that

$$M_{\mathcal{H},H}(z) = \begin{cases} i & z \in \mathbb{C}_+, \\ -i & z \in \mathbb{C}_-. \end{cases}$$

Now from Theorem 2 it follows that the operator H unitarily equivalent to the operator of multiplication by independent variable in the space $L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda)$ with domain

$$\mathfrak{D}(H) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda) | \lambda f(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda) \right\}, \tag{4.2}$$

$$(Hf)(\lambda) = \lambda f(\lambda). \tag{4.3}$$

while the symmetric operator $\mathcal{H}$ is unitarily equivalent to the operator of multiplication by independent variable in the same space $L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda)$ and has domain

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda) | \lambda f(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda), \int_R f(\lambda) d\lambda = 0 \right\}, \tag{4.4}$$

$$(\mathcal{H} f)(\lambda) = \lambda f(\lambda). \tag{4.5}$$

According to Theorem 5 operators $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ are of the shift-type. It can be proved ([2], Proposition 1) that we can put $\rho = 1$ in (3.4). Then in the space $L^2(\mathbb{R}, 1/\pi d\lambda)$ operators $U(t)$ act according to the formula

$$(U(t)f) = f(\lambda - t). \tag{4.6}$$

Thus, they also form a unitary group. Therefore we proved the following theorem.

Theorem 6. *Let $\mathcal{H}$ be symmetric operator with index of defect $(1,1)$, H be a self-adjoint extension of $\mathcal{H}$, and let $V(s) = \exp(isH)$, $s \in \mathbb{R}$ be the unitary group generated by H. Then the following statements are equivalent:*

(1) *There exists a unitary group $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ such that the canonical commutative relations in the Weyl's form*

$$U(t)V(s) = e^{-ist} V(s) U(t)$$

are fulfilled.

(2) *The Weyl-Titchmarsh function $M_{\mathcal{H},H}(z)$ of the pair $(\mathcal{H}, H)$ is constant in the each half-plane.*

From (4.2) it follows that unitary operators $V(s)$ are unitarily equivalent to the operators of multiplication by $e^{i\lambda s}$, and in such representation operators $U(t)$ are given by (4.6). Thus we obtained the Stone-von Neumann theorem for degree of freedom 1 [6].

Since for any other self-adjoint extension of the symmetric operator (4.4) corresponding Weyl-Titchmarsh function is also constant, it is possible to consider some modification of the group $V(s)$. Corresponding results are given in [2].

We would like to thank S.Belyi for some help.

References

[1] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Dover, New York, 1993.

[2] M. Bekker, E. Tsekanovskii, *On Periodic Matrix-Valued Weyl-Titchmarsh Functions.* Journal of Math. Anal. Appl. **294**(2004), 666-686.

[3] M. Bekker, K. Makarov, E. Tsekanovskii, *On affine Invariant Operators*, in preparation.

[4] F. Gesztesy and E. Tsekanovskii, *On Matrix-Valued Herglotz Functions*, Math. Nachr. **218** (2000), 61-138.

[5] M. G. Krein, *Fundamental Aspects of the Representation Theory of Hermitian Operators with Deficiency Index* (m,m), Ukrain. Math. Z. **1** (1949), 3-66; American Math. Soc. Transl. (2) **97** (1970), 75-143.

[6] M. H. Stone, *On One-Parameter Unitary groups in Hilbert Space*, Ann. Math. **33** (1932), 643-648.

Содержание

Сборник научных трудов

Информационно-издательский отдел
Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
95007, АР Крым, Симферополь, пр-т. Академика Вернадского, 4

Подписано к печати Формат 60×84/8 Бумага тип.
Объем 15 печ. л. Тираж 300 экз. Заказ